

1. Να δείξεις ότι σε κάθε Γ.Α.Τ η **δύναμη επαναφοράς** δίνεται σε τυχαία θέση

$$\text{από τη σχέση: } \mathbf{F = - D \cdot x}$$

“συνθήκη για την παραγωγή απλής αρμονικής ταλάντωσης”

→ σε τυχαία θέση, με απομάκρυνση x

$$\text{ισχύει : } \mathbf{a = -\omega^2 A \eta \mu \omega t}$$

→ άρα η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι:

$$\mathbf{F = m a}$$

$$= m(-\omega^2 A \eta \mu \omega t)$$

$$= -m\omega^2 (A \eta \mu \omega t)$$

$$\text{αλλά } A \eta \mu \omega t = \chi$$

$$\text{και } m\omega^2 = D \quad (\text{σταθερά επαναφοράς})$$

$$\text{άρα } \mathbf{F = - D \cdot X}$$

2. Να δείξεις ότι η **περίοδος** μιας Γ.Α.Τ. δίνεται από τη σχέση :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

$$\rightarrow \text{η σταθερά επαναφοράς } D = m\omega^2$$

$$\text{όμως } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\rightarrow \text{άρα } D = \frac{m4\pi^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 m}{D}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \quad (\text{όπου } \mathbf{D = k} \text{ για } \underline{\text{ένα}} \text{ ελατήριο})$$

Προσοχή: η σταθερά επαναφοράς δεν εξαρτάται από τη μάζα

3. Να δείξεις ότι σε κάθε Γ.Α.Τ η ταχύτητα σε τυχαία θέση δίνεται

$$\text{από τη σχέση : } \mathbf{U} = \pm \omega \sqrt{\mathbf{A}^2 - \mathbf{x}^2}$$

και να την παραστήσεις γραφικά.

1^{ος} τρόπος :

$$\Delta.E.T. \quad E = U + K$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D \chi^2 + \frac{1}{2} m U^2$$

$$\Rightarrow \quad D(A^2 - \chi^2) = m U^2$$

$$\Rightarrow \quad m \omega^2 (A^2 - \chi^2) = m U^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 (A^2 - \chi^2) = U^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \pm \omega \sqrt{\mathbf{A}^2 - \mathbf{x}^2}$$

2^{ος} τρόπος :

$$\chi = A \eta \mu \omega t \quad \Rightarrow \quad \eta \mu \omega t = \chi / A \quad \Rightarrow \quad \eta \mu^2 \omega t = \chi^2 / A^2$$

$$U = \omega A \sigma \nu \omega t \quad \Rightarrow \quad \sigma \nu \omega t = U / \omega A \quad \Rightarrow \quad \sigma \nu^2 \omega t = U^2 / \omega^2 A^2$$

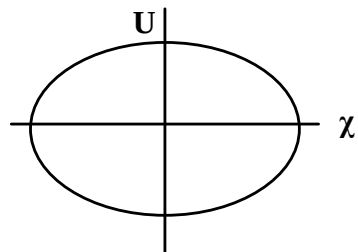
προσθέτω κατά μέλη :

$$\eta \mu^2 \omega t + \sigma \nu^2 \omega t = \chi^2 / A^2 + U^2 / \omega^2 A^2 \quad \Rightarrow$$

$$1 = \frac{\omega^2 \chi^2 + U^2}{\omega^2 A^2} \quad \text{(\u0395\u03be\u03b9\u03c3\u03c9\u03c3\u03b7 \u03b5\u03bb\u03b5\u03b9\u03c1\u03b7\u03c3\u03b7\u03c3)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 A^2 = \omega^2 \chi^2 + U^2$$

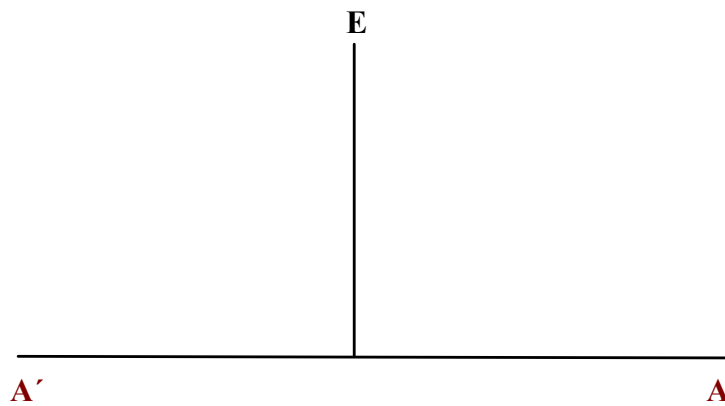
$$\Rightarrow U^2 = \omega^2 (A^2 - \chi^2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \pm \omega \sqrt{\mathbf{A}^2 - \mathbf{x}^2}$$



4. Να εκφράσεις την κινητική και τη δυναμική ενέργεια μιας Γ.Α.Τ. **συναρτήσει της απομάκρυνσης** και να τις παραστήσεις γραφικά στο ίδιο διάγραμμα.

$$\checkmark \quad U = \frac{1}{2} D x^2 \quad (\psi = \alpha x^2)$$

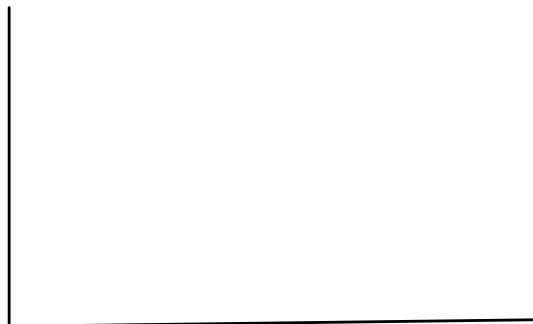
$$\checkmark \quad K = E - U = E - \frac{1}{2} D x^2 \quad (\psi = \alpha - \beta x^2)$$



5. Να εκφράσεις την κινητική και τη δυναμική ενέργεια μιας Γ.Α.Τ. **συναρτήσει του χρόνου** και να τις παραστήσεις γραφικά στο ίδιο διάγραμμα.

$$\checkmark \quad U = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D A^2 \eta \mu^2 \omega t = E \cdot \eta \mu^2 \omega t$$

$$\checkmark \quad K = \frac{1}{2} m U^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sigma \nu^2 \omega t = \frac{1}{2} D A^2 \sigma \nu^2 \omega t = E \cdot \sigma \nu^2 \omega t$$



6. Να δείξεις ότι η δυναμική ενέργεια στη Γ.Α.Τ. δίνεται από τη σχέση :

$$U = \frac{1}{2} D \cdot x^2$$

Έστω ελατήριο σταθεράς k με το φυσικό του μήκος. Ασκώ εξωτερική δύναμη $F_{εξ}$ για να του προκαλέσω παραμόρφωση x . Η δύναμη μου αυτή (μεταβλητού μέτρου) πρέπει να αντισταθμίζει κάθε στιγμή τη δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου $F_{ελ}$.

Το έργο που καταναλίσκεται, αποθηκεύεται στο ελατήριο με τη μορφή δυναμικής ενέργειας.

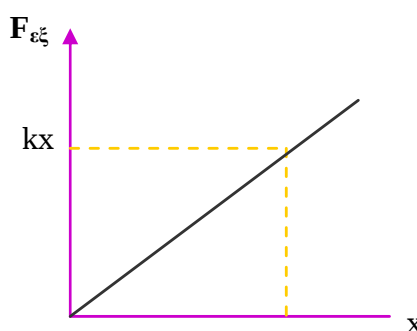
$$F_{εξ} = - F_{ελ}$$

αλλά

$$F_{ελ} = -kx$$

Άρα

$$F_{εξ} = kx$$



$$W_{F'} = E(\tau\rho\tau\gamma) = \frac{1}{2} x \cdot D \cdot x = \frac{1}{2} D x^2$$

$$U = W_{F'} = \frac{1}{2} D x^2$$

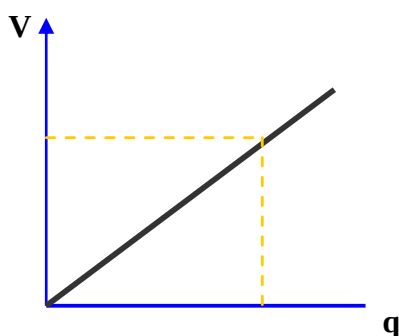
- Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο πεδίο του πυκνωτή στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις, υπολογίζεται από το αντίστοιχο εμβαδόν στο διάγραμμα $(q - V)$.

$$C = q / V$$

$$V = 1/C \cdot q$$

$$W = U = \frac{1}{2} q \cdot V$$

$$= \frac{1}{2} q^2 / C$$



7. Να δείξεις ότι η ολική ενέργεια της Γ.Α.Τ. δίνεται από τη σχέση :

$$\mathbf{E = \frac{1}{2} D \cdot A^2}$$

γνωρίζω ότι :

$$\mathbf{U = \frac{1}{2} D x^2}$$

όμως

$$\chi = A \eta \mu \omega t$$

άρα

$$\mathbf{U = \frac{1}{2} D A^2 \eta \mu^2 \omega t}$$

και

$$K = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sigma \upsilon \nu^2 \omega t = \frac{1}{2} D A^2 \sigma \upsilon \nu^2 \omega t$$

όπου

$$u = \omega A \sigma \upsilon \nu \omega t$$

και

$$D = m \omega^2$$

όμως

$$E_T = U + K$$

$$= \frac{1}{2} D A^2 \eta \mu^2 \omega t + \frac{1}{2} D A^2 \sigma \upsilon \nu^2 \omega t$$

$$= \frac{1}{2} D A^2 (\underbrace{\eta \mu^2 \omega t + \sigma \upsilon \nu^2 \omega t}_{1})$$

1

άρα

$$E_T = \frac{1}{2} D A^2$$

8. Να δείξεις ότι στις μηχανικές Γ.Α.Τ. ταλαντώσεις ισχύει :

$$U_0 = \omega \cdot A$$

1^{ος} τρόπος: παραγωγή

$$x = A \eta \mu \omega t$$

$$u = dx/dt = (x)' = (A \eta \mu \omega t)' \quad f\{g(x)\} = f' \cdot g'$$

$$u = A(\sigma \nu \nu \omega t)(\omega t)' \quad (\omega t)' = \omega' t + \omega t' = 0 + \omega \cdot 1 = \omega$$

$$u = A \omega \sigma \nu \nu \omega t$$

$$u = u_0 \sigma \nu \nu \omega t \quad \text{όπου} \quad u_0 = \omega A$$

2^{ος} τρόπος: ΑΔΕΤ

$$\frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} m u^2 \Rightarrow$$

$$D A^2 = D x^2 + m u^2$$

$$\text{αλλά} \quad D = m \omega^2$$

$$x = A \eta \mu \omega t \quad \text{και} \quad u = u_0 \sigma \nu \nu \omega t$$

άρα

$$m \omega^2 A^2 = m \omega^2 A^2 \eta \mu^2 \omega t + m u_0^2 \sigma \nu \nu^2 \omega t \Rightarrow$$

$$\omega^2 A^2 = \omega^2 A^2 \eta \mu^2 \omega t + u_0^2 \sigma \nu \nu^2 \omega t \Rightarrow$$

$$\omega^2 A^2 (1 - \eta \mu^2 \omega t) = u_0^2 \sigma \nu \nu^2 \omega t \Rightarrow$$

$$\omega^2 A^2 \sigma \nu \nu^2 \omega t = u_0^2 \sigma \nu \nu^2 \omega t \Rightarrow$$

$$\omega^2 A^2 = u_0^2 \Rightarrow \quad u_0 = \omega A$$

9. Να δείξεις ότι στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις ισχύει :

$$I = \omega \cdot Q$$

1^{ος} τρόπος : παραγωγή

$$q = Q \sin \omega t \quad (1)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = (q)' = Q(\sin \omega t)' \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} i &= Q(-\eta \mu \omega t)(\omega t)' \\ \text{όμως :} \quad i &= -I \eta \mu \omega t \quad (2) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} i &= Q(-\eta \mu \omega t)(\omega t)' \\ i &= -I \eta \mu \omega t \end{aligned}} \right\}$$

$$\text{άρα} \quad -I \eta \mu \omega t = -\omega Q \eta \mu \omega t$$

$$\Rightarrow I = \omega Q$$

2^{ος} τρόπος : ΔΕΤ

$$E_{\text{ολ}} = U_E + U_B$$

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2 \Rightarrow L I^2 = \frac{Q^2 \sin^2 \omega t}{C} + L I^2 \eta \mu^2 \omega t \Rightarrow$$

$$L C I^2 = Q^2 (1 - \eta \mu^2 \omega t) + L C I^2 \eta \mu^2 \omega t$$

$$I^2 L C (1 - \eta \mu^2 \omega t) = Q^2 (1 - \eta \mu^2 \omega t) \Rightarrow I^2 = \frac{1}{L C} Q^2 \Rightarrow$$

αλλά,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi \sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\text{Άρα} \quad I^2 = \omega^2 Q^2$$

10. Να δείξεις ότι η (εκθετική) εξίσωση της φθίνουσας ταλάντωσης,

$$A_k = A_0 e^{-\Lambda T}$$

ισοδυναμεί με την αναλογία : $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \text{σταθ}$

$t = kT$ (k=0,1,2,3,...)

άρα

$$A_1 = A_0 e^{-\Lambda T} \quad (\kappa = 1)$$

$$A_2 = A_0 e^{-\Lambda 2T} \quad (\kappa = 2)$$

$$A_3 = A_0 e^{-\Lambda 3T} \quad (\kappa = 3)$$

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_0}{\cancel{A_0} e^{-\Lambda T}} = e^{\Lambda T}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\Lambda T}}{A_0 e^{-\Lambda 2T}} = \frac{e^{-\Lambda T}}{(e^{-\Lambda T})^2} = \frac{1}{e^{-\Lambda T}} = e^{\Lambda T}$$

t

t

11. Να δείξεις την εξίσωση της σύνθεσης δύο Γ.Α.Τ. ίδιας συχνότητας, ίδιας θέσης ισορροπίας, πλάτους και διεύθυνσης (με διαφορά φάσης) :

$(\omega_1 = \omega_2)$

$$X_1 = A_1 \eta \mu \omega t$$

$$X_2 = A_2 \eta \mu(\omega t + \varphi)$$

$$X_{\text{ολ}} = X_1 + X_2$$

(αρχή της επαλληλίας)

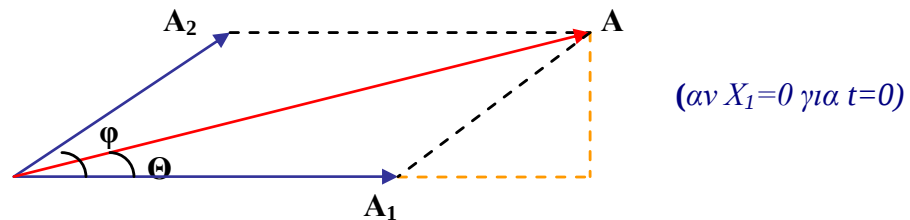
$$X_{o\lambda} = A\eta\mu(\omega t + \theta)$$

όπου

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\nu\phi}$$

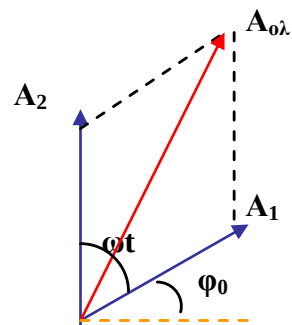
και

$$\theta = \frac{A_2\eta\mu\phi}{A_1 + A_2\sigma\nu\phi}$$



αλλιώς,

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1\eta\mu(\omega t + \phi_0) \\ X_2 &= A_2\eta\mu(\omega t + \phi_0 + \phi) \\ \text{και} \\ X_{o\lambda} &= A\eta\mu(\omega t + \phi_0 + \theta) \end{aligned}$$



ειδικές περιπτώσεις :

$$1. \text{ αν } \phi = 0 \quad X_{o\lambda} = A_1 + A_2$$

$$2. \text{ αν } \phi = \pi \quad X_{o\lambda} = A_1 - A_2$$

12. Να δείξεις την εξίσωση της **σύνθεσης δύο Γ.Α.Τ.** με διαφορετικές συχνότητες, ίδια θέση ισορροπίας, πλάτος και διεύθυνση (χωρίς διαφορά φάσης) :

$$(\omega_1 \neq \omega_2)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= A\eta\mu\omega_1 t \\ X_2 &= A\eta\mu\omega_2 t \end{aligned} \right\}$$

$$X_{o\lambda} = X_1 + X_2 = A (\eta\mu\omega_1 t + \eta\mu\omega_2 t)$$

όμως

$$\{ \eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\nu \frac{A-B}{2} \}$$

άρα

$$X_{o\lambda} = 2A\eta\mu \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \sigma\nu \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$$

ή

$$X_{o\lambda} = \underbrace{2A\sigma\nu \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t}_{A'} \cdot \eta\mu \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

Ειδικά όταν

$$\underline{\omega_1 \approx \omega_2}$$

(Διακρότημα)

$$\text{τότε} \quad X_{o\lambda} = A' \eta\mu\omega t \quad \left(\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right)$$

13. Να δείξεις ότι η **περίοδος του διακροτήματος** δίνεται από τη σχέση :

$$T_{\delta} = \frac{1}{|f_1 - f_2|}$$

$$\mathbf{T_{\delta} = t_2 - t_1}$$

(διαδοχικές στιγμές όπου μηδενίζεται το πλάτος A')

$$\text{άρα} \quad A' = 2A \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = \pi / 2$$

δηλαδή

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = (2K + 1)\pi / 2$$

$$\text{για } \kappa=0: \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = \pi / 2 \quad (1)$$

$$\text{για } \kappa=1 \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t_2 = \frac{3\pi}{2} \quad (2)$$

$$(1) \quad \frac{2\pi f_1 - 2\pi f_2}{2} t_1 = \pi / 2 \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{2(f_1 - f_2)}$$

$$(2) \quad \frac{2\pi f_1 - 2\pi f_2}{2} t_2 = 3\pi / 2 \Rightarrow \quad t_2 = \frac{3}{2(f_1 - f_2)}$$

άρα

$$T_{\delta} = \frac{3-1}{2(f_1 - f_2)} = \frac{2}{2(f_1 - f_2)} = \frac{1}{(f_1 - f_2)}$$