

άσκηση εμπέδωσης

1^ο κεφαλαίου

μία λυμένη σύνθετη άσκηση
κτισμένη βήμα- βήμα
με παράλληλη εμπέδωση της θεωρίας

Ο κενός χώρος

Έστω αρχικά ένας κενός χώρος. Ο χώρος αυτός είναι αδιαφοροποιήτος, έχει δηλαδή παντού (σε κάθε του σημείο) τις ίδιες ιδιότητες. Είναι όπως λέμε αλλιώς ισότροπος ή **ομογενής**.

Η πηγή

Ένα σημειακό (πολύ μικρό σε διαστάσεις) θετικό ηλεκτρικό φορτίο Q_1 (θα μπορούσε να είναι και αρνητικό), που το χαρακτηρίζουμε ως **πηγή** (του ηλεκτρικού πεδίου), εμφανίζεται στον χώρο αυτό. Το φορτίο δεν δέχεται καμία επίδραση από τον χώρο, δεν αντιλαμβάνεται την παρουσία κανενός γύρω του, άρα μπορεί να μετακινηθεί τελείως ανενόχλητο από το ένα σημείο του χώρου σε κάποιο άλλο, χωρίς δαπάνη ενέργειας, όπως τυχόν θελήσει ή να σταθεί σε όποιο σημείο θέλει. Δεν αντιμετωπίζει κανένα νόμο ή καθορισμό, καμία τάξη ή απαγόρευση.

Το πεδίο (Η.Π.)

Έστω πως το φορτίο αυτό στέκεται τελικά ακίνητο σε ένα ορισμένο σημείο. Ο χώρος γύρω του έχει τώρα αλλάξει· νοιώθει την παρουσία του φορτίου, επηρεάζεται, αλλοιώνεται, παραμορφώνεται (κατά τον Einstein καμπυλώνει). Δεν είναι πια ένας χώρος κενός, έχει μετατραπεί σε ένα ηλεκτρικό **πεδίο** που κάθε του σημείο έχει αποκτήσει διαφορετικές ιδιότητες από το διπλανό του. Ο χώρος είναι πια οργανωμένος, έχει μια τάξη, που καθορίζει συμπεριφορές και θέτει απαγορεύσεις σε οποιοδήποτε άλλο ηλεκτρικό φορτίο τυχόν πλησιάσει.

Το υπόθεμα

Η διαφοροποίηση αυτή του χώρου δεν είναι από μόνη της εμφανής, δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμη. Μπορεί όμως εύκολα να διαπιστωθεί, αν δοκιμάσουμε να φέρουμε κοντά του ένα άλλο μικρό (σημειακό) θετικό ηλεκτρικό φορτίο q , που το χαρακτηρίζουμε δοκιμαστικό ή αλλιώς **υπόθεμα**. Τότε θα διαπιστώσουμε πως το υπόθεμα μας δεν είναι ελεύθερο, σαν το αρχικό φορτίο Q_1 , να κινηθεί όπως και όπου θέλει μέσα στο χώρο. Η παρουσία του Q_1 του επιβάλλει μια σειρά από πράγματα.

Η δύναμη

Σε όποιο σημείο του πεδίου κι αν σταθεί το υπόθεμα μας, θα 'νοιώσκει' την επίδραση της πηγής, δηλαδή του Q_1 . Θα δεχθεί μια δύναμη που η τιμή της δεν έχει την ίδια τιμή για όλα τα σημεία του πεδίου. Όσο πιο μακριά σταθεί από το Q_1 τόσο μικρότερη θα είναι η δύναμη αυτή, ενώ όσο πλησιάζει τόσο εντονότερη θα 'νοιώθει' την παρουσία της πηγής (η δύναμη που δέχεται θα μεγαλώνει).

Ο 3^{ος} νόμος του Νεύτωνα

Εδώ βέβαια θα πρέπει να θυμηθούμε και τον 3^ο νόμο του Νεύτωνα, που μας ξεκαθαρίζει ότι οι δυνάμεις στη φύση απαντούν πάντα σε ζεύγη (δράση-αντίδραση). Κάθε φορά δηλαδή που ένα σώμα Α ασκεί δύναμη $F_{1,2}$ σε ένα άλλο σώμα Β, το σώμα Β αντιδρά ασκώντας ίσου πάντα μέτρου αλλά αντίθετης φοράς δύναμη $F_{2,1}$ στο Α.

Η αλληλεπίδραση

Αρα και το Q_1 αντίστοιχα θα ‘αντιληφθεί’ την παρουσία του q στο χώρο ή αλλιώς θα δεχθεί επίδραση (δύναμη) από το q. Με άλλα λόγια μιλάμε τελικά για αλληλεπίδραση των δύο ηλεκτρικών φορτίων.

Ο νόμος του Coulomb

Το μέτρο της αλληλεπίδρασης αυτής, το μέτρο δηλαδή των δυνάμεων $F_{1,2}$ και $F_{2,1}$, υπολογίζεται με τον νόμο του Κουλόμπ:

$$F = k_c |Q_1 \cdot Q_2| / r^2 \quad \text{ή} \quad F = k_c |Q \cdot q| / r^2$$

έτσι αν πχ το μέτρο των δύο φορτίων είναι $Q=4\mu\text{C}$ και $q=1\mu\text{C}$ αντίστοιχα, οι δυνάμεις για μεταξύ τους απόσταση $r = 30\text{cm}$, με γνωστό ότι $k_c = 9 \cdot 10^9$, θα είναι:

$$|F_{1,2}| = |F_{2,1}| = F = 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6} / (30 \cdot 10^{-2})^2 = 0,4 \text{ N}$$

Η ένταση του Η.Π.

Στο σημείο Α που βρίσκεται το υπόθεμα q, το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από το Q (θεωρούμενο ως πηγή του πεδίου), θα είναι:

$$E_A = F / +q \quad \text{ή} \quad E_A = 0,4 / 10^{-6} = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

Αν δεν είχαμε ήδη υπολογίσει τη δύναμη, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $E_A = K_c |Q| / r^2$ και θα καταλήγαμε βέβαια στο ίδιο αποτέλεσμα.

Η φορά του διανύσματος της έντασης θα είναι εκείνη της δύναμης $F_{1,2}$ που ασκείται στο (θετικό) υπόθεμα q, ενώ αν είχαμε επιλέξει αρνητικό υπόθεμα, θα ήταν αντίθετη της φοράς της $F_{1,2}$.

Οι δυναμικές γραμμές (δ.γ)

Είναι νοητές γραμμές που δίνουν μια εποπτική παράσταση (εικόνα) του Η.Π. και που το διάνυσμα της έντασης σε κάθε σημείο του πεδίου, εφάπτεται στη δ.γ. που διέρχεται από το σημείο αυτό

Δεν τέμνονται μεταξύ τους και η πυκνότητά τους σε μια περιοχή του Η.Π. δηλώνει το μέτρο της έντασης (πυκνές γραμμές, μεγάλη ένταση).

Το φάσμα του Η.Π.

Το σύνολο των δ.γ. ενός πεδίου ονομάζεται **φάσμα** του πεδίου.

Τοπογραφία ενός Η.Π.

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται γύρω από την πηγή μας είναι **ανομοιογενές** (η ένταση του δεν έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο) και η μορφή του που παριστάνεται εποπτικά με τις (νοητές-φανταστικές) δυναμικές γραμμές είναι **ακτινική**. Οι δ.γ. ξεκινούν από την (θετική) πηγή με κατεύθυνση προς το άπειρο, ενώ αντίθετα για αρνητική πηγή θα είχαν φορά από το άπειρο προς την πηγή.



Το δυναμικό του Η.Π.

Στο σημείο A που βρίσκεται το υπόθεμα q , το δυναμικό του πεδίου θα είναι:

$$V_A = kqQ/r \quad \text{ή} \quad V_A = 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6} / (30 \cdot 10^{-2}) = 4 \cdot 10^5 \text{ Volt}$$

Το έργο

α) $W_A \propto$

Αν αφήσουμε ελεύθερο το υπόθεμα q , που βρίσκεται στη θέση A, να κινηθεί με την επίδραση της απωστικής δύναμης που δέχεται από την πηγή Q, (διατηρώντας το Q ακίνητο στη θέση του), αυτό θα επιταχυνθεί και θα φθάσει μακριά (στο άπειρο). Η δύναμη $F_{1,2}$ που δέχεται, είναι ομόροπη με τη μετατόπιση άρα παράγει έργο (θετικό). Το έργο αυτό δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε με τον τύπο $W=F \cdot x$ που μάθαμε στην Α' Λυκείου, γιατί το μέτρο της $F_{1,2}$ εξαρτάται από την απόσταση, άρα δεν είναι σταθερό. Έτσι καταφεύγουμε στον τύπο του δυναμικού $V_A = W_{A\infty}/q$ και λύνοντας έχουμε:

$$W_{A\infty} = q \cdot V_A = 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^{-1} \text{ Joule}$$

β) $W_{\infty A}$

Ας υποθέσουμε τώρα αντίθετα, πως το υπόθεμα μας βρισκότανε αρχικά ακίνητο, έξω από το ηλεκτρικό πεδίο (θεωρητικά λέμε στο άπειρο, αλλά στην πράξη εννοούμε πολύ μακριά από το Q) και προσπαθήσουμε να φέρουμε κοντά και να το τοποθετήσουμε στο σημείο A, θα πρέπει να υπερνικήσουμε τη μεταξύ των δύο ομώνυμων φορτίων άπωση, που αντιστέκεται στο πλησίασμα που επιχειρούμε. Εμείς δηλαδή πρέπει να παράξουμε κάποιο έργο (θετικό), το οποίο καταναλώνεται από την ηλεκτρική δύναμη (αρνητικό) και αποθηκεύεται με τη μορφή ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας στο σύστημα των δύο φορτίων. Το έργο αυτό υπολογίζεται και πάλι από τον τύπο:

$$V_A = W_{A\infty}/q$$

$$\text{αλλά } W_{\infty A} = -W_{A \infty} = -q \cdot V_A = -4 \cdot 10^{-1} \text{ Joule}$$

$$\gamma) W_{AB}$$

Αν τώρα το υπόθεμα μετακινηθεί από τη θέση Α που βρίσκεται, σε μια άλλη θέση Β του πεδίου, με την επίδραση της πεδιακής δύναμης, το έργο που παράγεται (ή καταναλώνεται) υπολογίζεται από τον τύπο της διαφοράς δυναμικού:

$$V_{AB} = W_{AB} / q = k_c Q (1/r_1 - 1/r_2) \quad \text{άρα}$$

$$W_{AB} = k_c Q q (1/r_1 - 1/r_2)$$

Έτσι αν q μετακινηθεί με την επίδραση της απωστικής δύναμης $F_{1,2}$ του πεδίου από τη θέση Α όπου $r_1 = 30 \text{ cm}$, στη θέση Β όπου $r_2 = 40 \text{ cm}$, η $F_{1,2}$ θα παράξει έργο:

$$W_{AB} = 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6} (1/0,3 - 1/0,4) = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Joule}$$

Η δυναμική ενέργεια

Η δυναμική ενέργεια που έχει αποθηκευτεί **στο σύστημα** των δύο φορτίων, είναι ίση με το έργο που παράχθηκε όταν πλησιάσαμε το δύο φορτία.

Προσοχή:

Η δυναμική ενέργεια αποδίδεται συνήθως εξ ολοκλήρου στο υπόθεμα, θεωρώντας αυθαίρετα την πηγή σαν αναφορά, δηλαδή με μηδενική ενέργεια. Στο πεδίο βαρύτητας της γης q αποδίδουμε τη δυναμική ενέργεια mgh σε ένα σώμα που βρίσκεται σε ύψος h από την επιφάνειά της, ενώ στην πραγματικότητα είναι η ενέργεια του συστήματος σώμα-γη.

Η δυναμική ενέργεια του υποθέματος στη θέση Α (θεωρώντας μηδενική την ενέργεια της πηγής), υπολογίζεται από τον τύπο $V_A = U_A / q$:

$$U_A = q \cdot V_A = W_{A\infty} = 4 \cdot 10^{-1} \text{ Joule}$$

Θα μπορούσαμε επίσης να την υπολογίσουμε από τον τύπο $U = k_c Q q / r$

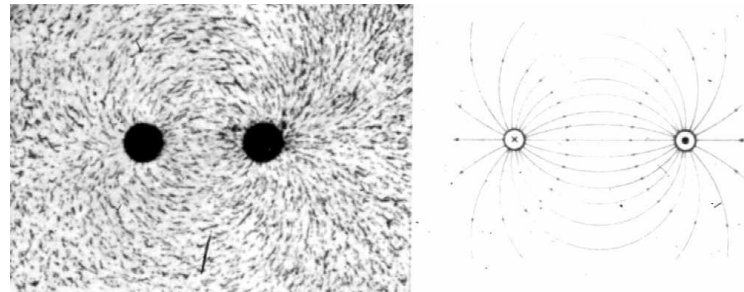
Στον τύπο δεν υπάρχει απόλυτη τιμή, άρα αν τα φορτία είναι ομώνυμα η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια θα είναι θετική, ενώ αν είναι ετερόνυμα αρνητική.

Σύνθετο πεδίο

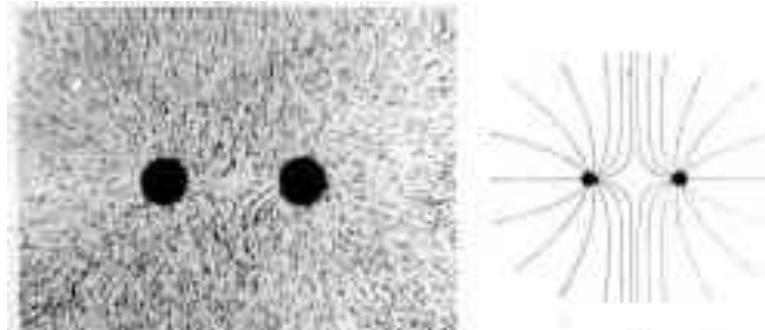
Αν τώρα φανταστούμε ένα σύνθετο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται γύρω από δύο (θα μπορούσε να είναι και περισσότερα, αλλά ας αρκεστούμε προς το παρόν στα δύο) ακίνητα σημειακά ηλεκτρικά φορτία Q_1 και Q_2 , με μικρή σχετικά απόσταση μεταξύ τους. Εδώ τα πράγματα βέβαια ζορίζουν λίγο - κυρίως όσον αφορά στα διανυσματικά μεγέθη, όπως είναι η δύναμη και η ένταση και όχι τόσο για τα μονόμετρα όπως είναι το δυναμικό, το έργο και η δυναμική ενέργεια - αλλά ας προσπαθήσουμε να τα ξεκαθαρίσουμε.

Ένα βασικό μεθοδολογικό εργαλείο, που είναι πολύτιμο εδώ, είναι η χρήση της **αρχής της επαλληλίας**, που μας επιτρέπει να θεωρήσουμε την μία πηγή να λειτουργεί ανεξάρτητα από την άλλη και να φέρνει το αποτέλεσμα της. Στο τέλος θα πρέπει βέβαια να προσθέσουμε τα δύο αποτελέσματα.

1. **Το φάσμα** γίνεται λίγο πιο περίπλοκο με τις δ.γ. να καμπυλώνουν:

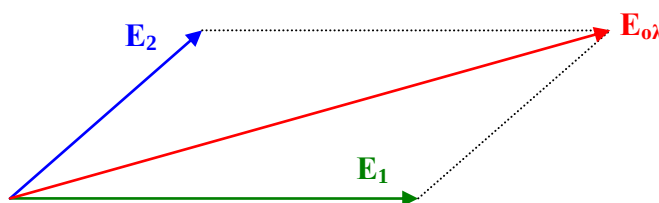


Φάσμα του Η.Π. μεταξύ δύο α) ετερόνυμων
ή
β) ομώνυμων σημειακών ηλεκτρικών φορτίων



(βλέπε επίσης τα σχήματα 3.1.19 , 3.1.20 και 3.1.21 στη σελίδα 22 του βιβλίου).

2. **Η δύναμη** που θα ασκηθεί σε ένα υπόθεμα που θα φέρουμε σε ένα σημείο του σύνθετου πεδίου, θα είναι απλά η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκεί η κάθε μία πηγή χωριστά.
3. **Η ένταση** σε ένα σημείο Α του πεδίου, υπολογίζεται σαν διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους εντάσεων που δημιουργεί στο σημείο Α η κάθε πηγή χωριστά.



Εδώ όμως είναι απαραίτητο να θυμηθούμε από την Α' Λυκείου τους τύπους για τη σύνθεση δύο διανυσμάτων που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ :

$$a^2 = b^2 + \gamma^2 \quad (\text{αν είναι κάθετα μεταξύ τους})$$

$$a^2 = b^2 + \gamma^2 + 2ab\cos\varphi \quad (\text{αν σχηματίζουν τυχαία γωνία } \varphi)$$

4. **Το δυναμικό** σε ένα σημείο A, υπολογίζεται απλά σαν αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών που δημιουργεί στο σημείο A η κάθε πηγή χωριστά.

$$V_{ολ} = V_1 + V_2 + \dots$$

Εδώ χρειάζεται μόνον προσοχή στα πρόσημα, αφού το δυναμικό μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό, ανάλογα με το αν η πηγή έχει $Q > 0$ ή $Q < 0$.

5. **Η δυναμική ενέργεια** σε ένα σημείο A, υπολογίζεται πάλι απλά, σαν αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών ενεργειών στο σημείο A που οφείλονται κάθε πηγή χωριστά.

$$U_{ολ} = U_1 + U_2 + \dots$$

6. **Το έργο** για τη μετακίνηση από ένα σημείο Σ του πεδίου μέχρι το άπειρο ή μέχρι κάποιο άλλο σημείο Ρ του πεδίου, υπολογίζεται επίσης απλά, σαν αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων που οφείλονται κάθε πηγή χωριστά.

$$W_{ολ} = W_1 + W_2 + \dots$$

Προσοχή:

Αν θέλω πχ να υπολογίσω τη **δυναμική ενέργεια** του **συστήματος** τεσσάρων σημειακών ηλεκτρικών φορτίων Q_1, Q_2, Q_3 και Q_4 , που βρίσκονται στις κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς a , σχηματίζω όλα τα δυνατά ζεύγη φορτίων, δηλαδή: $Q_1-Q_2, Q_1-Q_3, Q_1-Q_4, Q_2-Q_3, Q_2-Q_4$ και Q_3-Q_4 , υπολογίζω την δυναμική ενέργεια του κάθε ζεύγους με τον τύπο $U = k_C Qq/r$ και στο τέλος τις προσθέτω:

$$U_{ολ} = k_C Q_1 Q_2 / a + k_C Q_1 Q_3 / a + k_C Q_1 Q_4 / a + k_C Q_2 Q_3 / a + k_C Q_2 Q_4 / a + k_C Q_3 Q_4 / a$$

Άσκηση (δύο πηγές)

Δύο όμοιες μικρές σφαίρες που κρέμονται από αβαρή παράλληλα νήματα μήκους $l = 1\text{m}$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Οι σφαίρες φέρουν ακίνητα σημειακά ηλεκτρικά φορτία $+Q_1 = +Q_2$ και ηρεμούν σε απόσταση $d = l$ μεταξύ τους. Αν $k_C = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$ να υπολογίσετε το φορτίο Q .

Άλυτη άσκηση

Θετικό σημειακό ηλεκτρικό φορτίο $Q_1 = -2 \mu\text{C}$ είναι ακίνητο σε σημείο Α.
Αν $k_C = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$:

Α. μια πηγή

1. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τη δύναμη σε δοκιμαστικό φορτίο $q = +4\mu\text{C}$ που τοποθετούμε σε σημείο Γ, που απέχει $r = 30\text{cm}$ από την πηγή.
2. Να υπολογίσετε την απόσταση από το Q στην οποία πρέπει να βρεθεί δοκιμαστικό φορτίο $q = +4\mu\text{C}$, για να δεχθεί δύναμη μέτρου $0,4\text{N}$.
3. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το διάνυσμα της έντασης στο σημείο Γ.
4. Να υπολογίσετε το δυναμικό του πεδίου στο σημείο Γ.
5. Να υπολογίσετε το έργο που θα παράξει η δύναμη του πεδίου για τη μεταφορά του δοκιμαστικού φορτίου q από το άπειρο στο σημείο Γ.
6. Να υπολογίσετε την δυναμική ενέργεια του φορτίου q .
7. Να υπολογίσετε το έργο που θα παράξει η δύναμη του πεδίου για τη μεταφορά του δοκιμαστικού φορτίου q από το σημείο Γ σε σημείο Δ που απέχει 40cm από το φορτίο Q.

Β. δύο πηγές

Δύο σημειακά ηλεκτρικά φορτία $Q_1 = -2 \mu\text{C}$ και $Q_2 = + 4 \mu\text{C}$ είναι ακίνητα στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.. Αν $AB = 60 \text{ cm}$ και $k_C = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$:

1. Να υπολογίσετε την ένταση και το δυναμικό στο μέσο Μ της απόστασής τους.
2. Να βρείτε σε ποιο σημείο της ευθείας ΑΒ μηδενίζεται η ένταση του Η.Π., που δημιουργείται από τα δύο φορτία και σε ποιο μηδενίζεται το δυναμικό.
3. Να υπολογίσετε την ένταση και το δυναμικό σε σημείο Γ που απέχει 40 cm από το μέσο Μ της απόστασής τους.

Γ. περισσότερες πηγές

Τρία (όμοια) φορτία στις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ

Τέσσερα φορτία στις κορυφές τετραγώνου ή παραλληλογράμου ΑΒΓΔ