

Όλα όσα θέλατε να μάθετε για τα

Ελατήρια

και ... ντρεπόσαστε να ρωτήσετε.



Κ. Γιαννακός
- φυσικός -

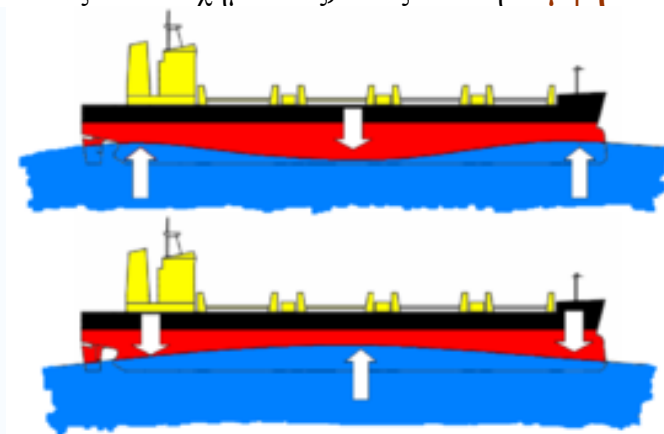
Ελαστικότητα

Είναι η ικανότητα που έχει ένα σώμα να επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση μετά από κάθε παραμόρφωση που θα υποστεί (υπό την προϋπόθεση όμως πως αυτή δεν υπερβαίνει ένα ορισμένο όριο), να ανακτά την αρχική μορφή του.

Παραμορφώσεις

Η συνήθης παραμόρφωση ενός στερεού είναι η γραμμική, η μεταβολή δηλαδή μιας διάστασής του (πχ του μήκους), που καλείται **έκταση** ή **ελκυσμός** (αν $\Delta l > 0$) και **συσπίρωση** ή **θλίψη** (αν $\Delta l < 0$).

Ελαστικότητα όμως παρουσιάζουν τα μέταλλα και σε διατμητικές παραμορφώσεις, που τείνουν να αλλάξουν το σχήμα τους, όπως είναι η **κάμψη** και η **στρέψη**.



Παραστατική απεικόνιση των παραμορφώσεων στις οποίες υποβάλλονται τα πλοία. Διαδοχικές κάμψεις, πάνω **"κούλωση"** και κάτω **"κύρτωση"**, που όταν εναλλάσσονται με ένταση, το πλοίο κινδυνεύει να κοπεί στα δύο.



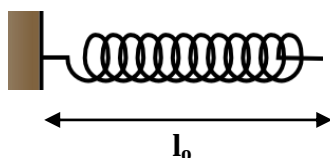
Στην κρεμαστή καλωδιωτή γέφυρα Ρίου-Αντιρίου μήκους 2.252 μέτρων (συνολικό κόστος 800.000.000 €), τα καλώδια ανάρτησης (που αποτελούνται από παράλληλα γαλβανισμένα συρματόσχοινα), σηκώνουν το φορτίο και υφίστανται **ελκυσμό**, μεταφέρουν το φορτίο στους 4 πυλώνες (βάρους 170.000 τόνους ο καθένας και ύψους 227 μέτρα), που υφίστανται **θλίψη**.

Ελατήριο

Μεταλλικό σύρμα που λόγω της ιδιότυπης σπειροειδούς κατασκευής του, παρουσιάζει αυξημένη ελαστικότητα, που οφείλεται σε συνδυασμό επιμήκυνσης με κάμψη και στρέψη των επιμέρους τμημάτων του.

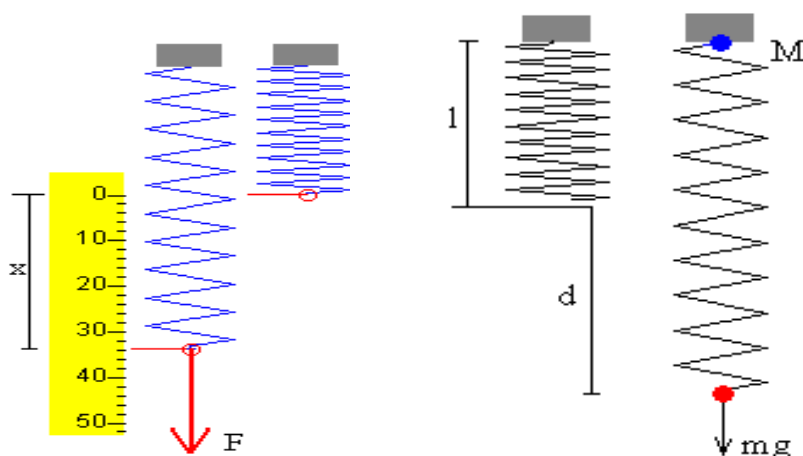
Φυσικό μήκος (l_0)

Είναι το μήκος του ελατηρίου, όταν αυτό δεν έχει υποστεί παραμόρφωση.



Παραμόρφωση (x ή Δl)

Υπολογίζεται πάντα σε σχέση με τη θέση του φυσικού μήκους (l_0) του ελατηρίου.



Όριο ελαστικότητας

που ονομάζουμε όριο ελαστικότητας του ελατηρίου.

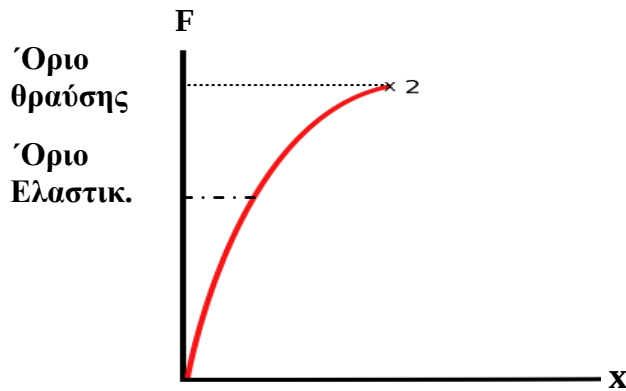
Οι δυνάμεις των ελατηρίων

- Για παραμόρφωση (Δl) μικρότερη από το όριο ελαστικότητας, ισχύει

ο νόμος του **Hooke**: $F = k(\Delta l)$ που δηλώνει ότι

«η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη της προκαλούμενης παραμόρφωσης».

Για παραμορφώσεις μικρότερες του ορίου ελαστικότητας (**ελαστική περιοχή**) η σχέση δύναμης επαναφοράς- παραμόρφωσης είναι γραμμική, ενώ στην **πλαστική περιοχή** όχι.



- Αν η προκαλούμενη παραμόρφωση υπερβεί το όριο ελαστικότητας, το ελατήριο δεν επανέρχεται ακριβώς στην αρχική του θέση (υφίσταται μόνιμη παραμόρφωση) παύει να ισχύει ο νόμος του Hooke και η κίνηση του παύει να είναι ΓΑΤ και καθίσταται απρόβλεπτη (**χαοτική**).
- Αν τέλος η προκαλούμενη παραμόρφωση υπερβεί ένα όριο (**όριο θραύσης**), το ελατήριο σπάει.
- Σε μικροσκοπικό επίπεδο η παραμόρφωση ενός στερεού μεταβάλλει τη μέση απόσταση των σωματιδίων του γύρω από 'δεσμευμένες' θέσεις ορισμένου εύρους, (αυξάνει την ταχύτητα, την ορμή και τη συχνότητα των μικροκινήσεων), κάτι που σε μακροσκοπικό επίπεδο αντιστοιχεί σε αλλαγή του σχήματος, του όγκου κλπ..

Σκληρότητα (**k**)

Η σταθερά k που εκφράζει τη σκληρότητα ενός ελατηρίου, εξαρτάται από τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά (μήκος, διατομή και αριθμός σπειρών), αλλά και από το πάχος του σύρματος και το μέταλλο από το οποίο είναι κατασκευασμένο.

- Αν κόψω ένα ελατήριο στη μέση, κάθε του κομμάτι θα έχει διπλάσια σκληρότητα από το αρχικό: ($k_{ολ} = 2k$).

Συνδεσμολογία ελατηρίων

- Αν συνδέσω **σε σειρά** δύο ελατήρια με σκληρότητες k_1 και k_2 αντίστοιχα, η σκληρότητα του συστήματος (άρα και η ισοδύναμη σκληρότητα του συστήματος, δηλαδή η σταθερά επαναφοράς (D) της ταλάντωσης, θα είναι:

$$k_{eq} \text{ ή } k_{ολ} = k_1 \cdot k_2 / k_1 + k_2$$

πχ αν ενώσω σε σειρά δύο όμοια ελατήρια (σταθεράς $k=k_1=k_2$ το καθένα), προκύπτει ελατήριο με τη μισή σκληρότητα: $k_{ολ} = k/2$.

- Αν συνδέσω **παράλληλα** δύο ελατήρια με σκληρότητες k_1 και k_2 αντίστοιχα, η σκληρότητα του συστήματος (άρα και η ισοδύναμη σκληρότητα του συστήματος, που είναι η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης D , θα είναι: $k_{ολ} = k_1 + k_2$

σε σειρά

$$F_1 = F_2$$

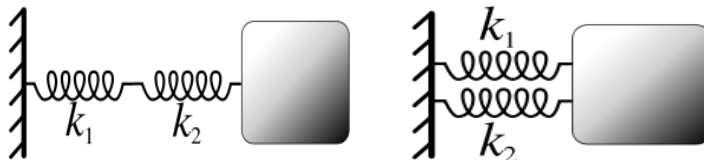
$$x = x_1 + x_2$$

παράλληλα

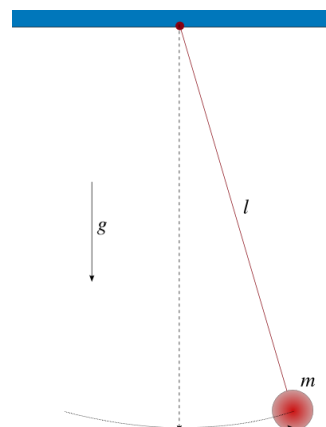
$$F_{ολ} = F_1 + F_2$$

$$x = x_1 + x_2$$

Ισοδύναμη σταθερά ελατηρίου	$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$	$k_{eq} = k_1 + k_2$
Παραμόρφωση	$F_1 = F_2$ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{k_2}{k_1}$	$x_1 = x_2$
Αποθηκευμένη ενέργεια	$\frac{E_1}{E_2} = \frac{k_2}{k_1}$	$\frac{E_1}{E_2} = \frac{k_1}{k_2}$



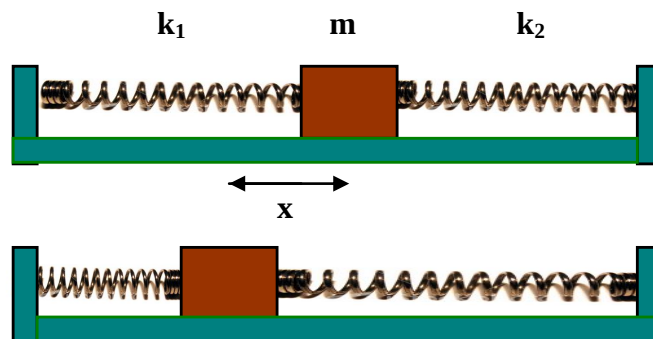
- Οποιοδήποτε σύστημα περιγράφεται από τον νόμο αυτό της δύναμης (Hooke) ονομάζεται **αρμονικός ταλαντωτής**. Κλασσικοί ταλαντωτές είναι το σύστημα **ελατήριο-μάζα** και το απλό (ή μαθηματικό) **εκκρεμές**.



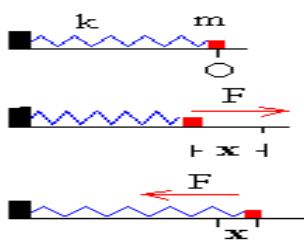
- Ένα ελατήριο παραμορφώνεται (εκτείνεται ή συμπιέζεται) από ένα **ζεύγος δυνάμεων**. Μία μόνο δύναμη μπορεί να το μετακινήσει και όχι να το παραμορφώσει.

Εάν το ένα του άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο σε κάποιο σημείο, φαίνεται να αρκεί για την παραμόρφωση του μια μόνον εξωτερική δύναμη, στο μέτρο όμως που η δεύτερη δύναμη του ζεύγους ασκείται από τον τοίχο.

Το σύστημα του σώματος μάζας m και των δύο ελατηρίων στο παρακάτω σχήμα, ισορροπεί, με τα ελατήρια (σκληρότητας k_1 και k_2 αντίστοιχα) να έχουν το φυσικό τους μήκος.



Εκτρέπω τη μάζα m κατά x προς τα αριστερά και αφήνω το σύστημα ελεύθερο. Να δείξετε ότι η κίνηση του θα είναι ΓΑΤ και να υπολογίσετε την περίοδο της, αν $m=2\text{kg}$, $k_1 = 30 \text{ N/m}$ και $k_2 = 60 \text{ N/m}$



Οι (μεταβλητού μέτρου) δυνάμεις των ελατηρίων είναι πάντα αντίθετης φοράς από την παραμόρφωση που έχουν υποστεί τα ελατήρια, τείνοντας να τα επαναφέρουν στην αρχική τους κατάσταση (θέση), γιατί και λέγονται **δυνάμεις επαναφοράς**.

- Οι δυνάμεις των ελατηρίων είναι **συντηρητικές**.

Το έργο τους δηλαδή είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.
(εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση)

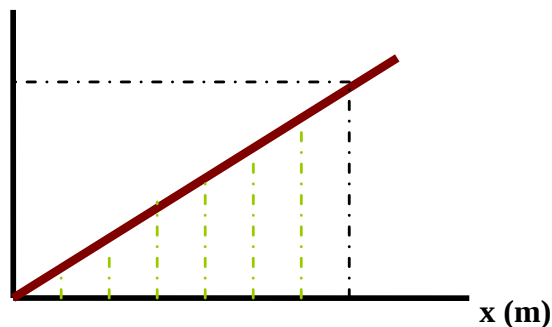
$$W_{F(\text{ελ})} = U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}}$$

Ενέργεια ελατηρίου

(παραμορφωμένου)

- Το έργο που καταναλώνει το εξωτερικό αίτιο για την παραμόρφωση ενός ελατηρίου απορροφάται από αυτό και εμφανίζεται ως δυναμική ελαστική ενέργεια του παραμορφωμένου ελατηρίου.
- Για παραμόρφωση Δl που βρίσκεται μέσα στα όρια της ελαστικότητάς του, η δυναμική ενέργεια ενός παραμορφωμένου ελατηρίου υπολογίζεται από το εμβαδόν του τριγώνου στο διάγραμμα $(F - x)$:

$F \text{ (N)}$



$$E_{ελ} = E_{τρ.} = \frac{1}{2} \beta v = \frac{1}{2} x(kx) = \frac{1}{2} k(\Delta l)^2$$

- Διπλάσια δηλαδή παραμόρφωση σημαίνει τετραπλάσια ενέργεια, τριπλάσια παραμόρφωση σημαίνει εννεαπλάσια ενέργεια κ.ο.κ.
- Αν θέλω να διπλασιάσω την παραμόρφωση ενός ελατηρίου (από Δl σε $2\Delta l$), απαιτείται τριπλάσια ενέργεια από εκείνη που δαπανήσαμε για την παραμόρφωση του από 0 σε Δl .

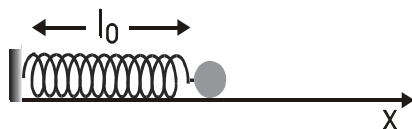
$$\Delta l \dots\dots\dots E_1 = \frac{1}{2} k(\Delta l)^2$$

$$2\Delta l \dots\dots\dots E_2 = \frac{1}{2} k(2\Delta l)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} k(\Delta l)^2 = 4 E_1$$

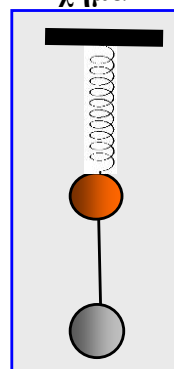
$$\text{άρα} \quad \Delta E = E_2 - E_1 = 4 E_1 - E_1 = 3E_1$$

- Όταν το ελατήριο ενός αρμονικού ταλαντωτή **είναι οριζόντιο** (σχήμα 1), στη Θ.Ι. το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, ενώ όταν είναι κατακόρυφο (σχήμα 2), ή σε κεκλιμένο επίπεδο (σχήμα 3), στη Θ.Ι. της ταλάντωσης το ελατήριο έχει αρχική παραμόρφωση (x_0), που πρέπει να υπολογίσουμε (με την εξίσωση: $\Sigma F = 0$ στη Θ. Ι.)

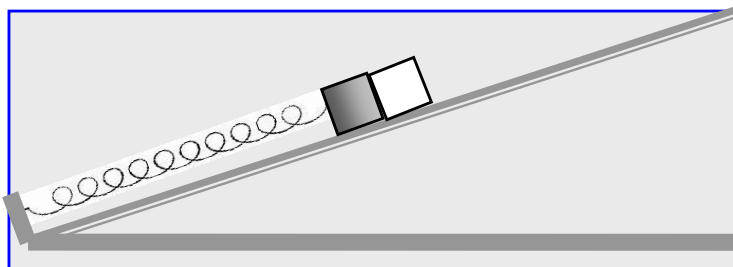
Σχήμα 1



Σχήμα 2

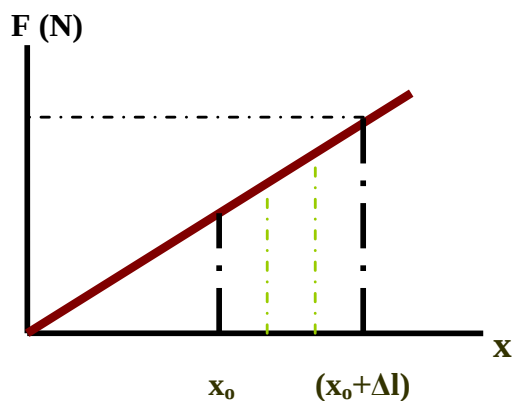


Σχήμα 3

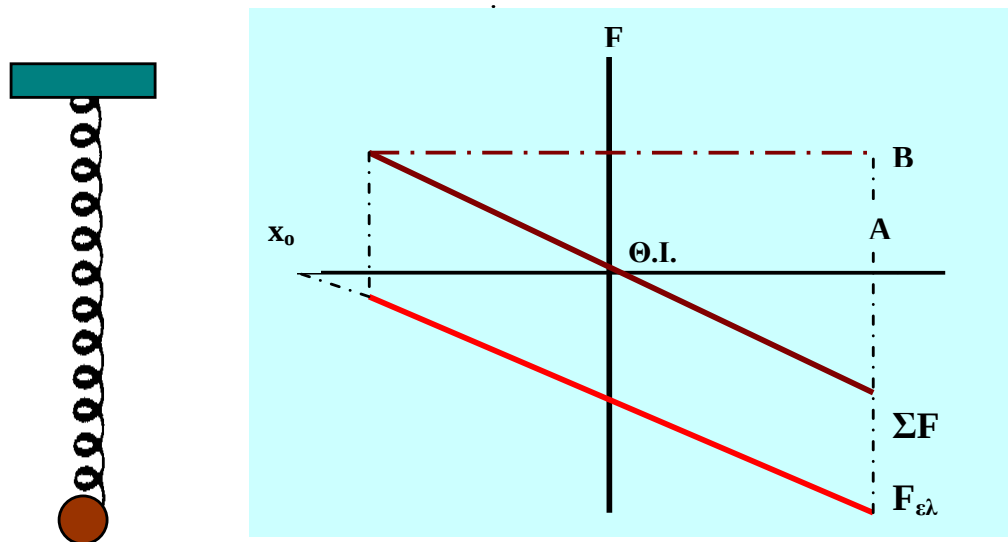


Προσοχή: η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου ταυτίζεται με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης, μόνον στο σχήμα 1. Στα σχήματα 2 και 3 εξάλλου, μεταβάλλεται από τη μία θέση της ταλάντωσης στην άλλη και η δυναμική ενέργεια της σφαίρας.

- Το έργο της δύναμης επαναφοράς του ελατηρίου, αν έχει αρχική παραμόρφωση υπολογίζεται από τη διαφορά: $W_{F_{ελ}} = U_{αρχ} - U_{τελ}$



- Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη μεταβολή της δύναμης επαναφοράς και της δύναμης του ελατηρίου, συναρτήσει της απομάκρυνσης, για ΓΑΤ με κατακόρυφο ταλαντωτή.



Πρόσεξε:

Η **δύναμη επαναφοράς** της ταλάντωσης είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στη μάζα m , (στο παραπάνω κατακόρυφο ελατήριο είναι: $\Sigma F = B - F_{ελ}$) άρα **δεν ταυτίζεται πάντα με τη δύναμη του ελατηρίου.**

Εφαρμογή:

Έστω ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k=200\text{N/m}$, που ισορροπεί κατακόρυφα με το κάτω άκρο του στερεωμένο στο δάπεδο. Στο ελεύθερο άκρο του συνδέω σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ και το συγκρατώ αρχικά στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αφήνω το σώμα ελεύθερο και το σύστημα εκτελεί α.α.τ.

1. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.
2. Να υπολογίσετε την ολική ενέργεια της ταλάντωσης.
3. Να παραστήσετε γραφικά τη δυναμική και την κινητική ενέργεια της ταλάντωσης του ελατηρίου συναρτήσει της θέσης της μάζας m .
4. Να παραστήσετε γραφικά, τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου συναρτήσει της θέσης της μάζας m .
5. Να παραστήσετε γραφικά, στο προηγούμενο διάγραμμα, τη δυναμική ενέργεια της μάζας m συναρτήσει της θέσης.