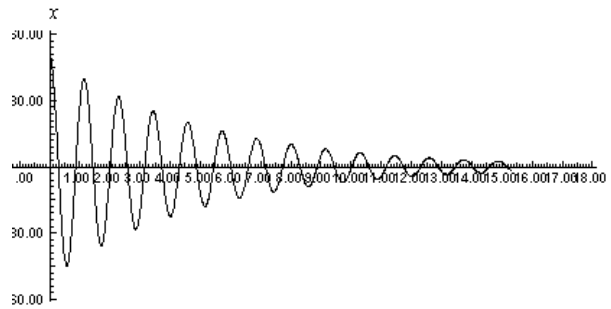


Φθίνουσες ταλαντώσεις :

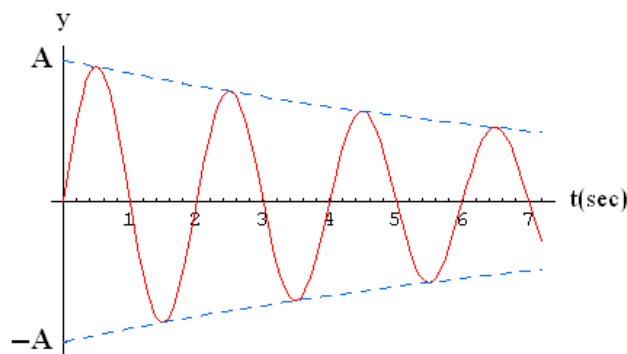


- **Φθίνουσα** ή **αποσβεννύμενη** ονομάζεται η ταλάντωση που το πλάτος της (άρα και η ολική της ενέργεια) διαρκώς μειώνεται και τελικά μηδενίζεται.
- Όλες οι **ελεύθερες** ταλαντώσεις στον μακρόκοσμο, λόγω τριβών ή αντιστάσεων του ρευστού (αέρας ή υγρό) μέσα στο οποίο εκτελούνται είναι φθίνουσες.
- Οι μη συντηρητικές αυτές δυνάμεις, που αντιτίθενται στην κίνηση, μεταφέρουν ενέργεια από το ταλαντούμενο σύστημα στο περιβάλλον.
- Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι ταλαντώσεις που εκτελούνται μέσα σε κάποιο ρευστό (αέρα ή υγρό), στις οποίες η αντιτιθέμενη δύναμη είναι ανάλογη της ταχύτητας.

$$F' = -bu$$

το (-) δηλώνει ότι η δύναμη έχει πάντα αντίθετη φορά από την ταχύτητα.

- Όπου **b** θετική ποσότητα, που ονομάζεται **σταθερά απόσβεσης**.
- Το **b** εξαρτάται από το ιξώδες του μέσου, αλλά και από το μέγεθος και το σχήμα του κινούμενου σώματος μέσα σε ρευστό.



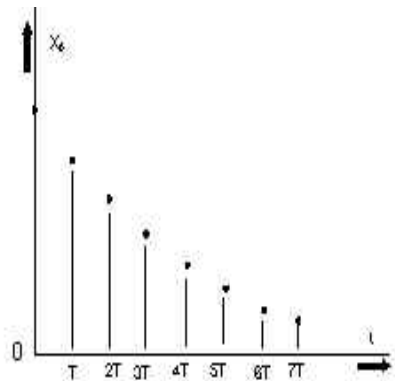
- Η πειραματική μελέτη της φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης γίνεται μέσα σε δοχείο, όπου μπορούμε να αφαιρούμε σταδιακά τον αέρα με μια αεραντλία, ελαττώνοντας την απόσβεση.
- Ο ρυθμός ελάττωσης του πλάτους εξαρτάται από την τιμή του b. Όσο δηλαδή το b αυξάνεται, η απόσβεση γίνεται ταχύτερη.

- Το πλάτος στη φθίνουσα ταλάντωση μειώνεται εκθετικά συναρτήσει του χρόνου:

$$A_v = A_0 e^{-\Lambda t} \quad (1) \quad \text{όπου } t = v \cdot T, \quad v = 0, 1, 2, 3, \dots$$

αν δηλαδή θέλω να βρω το 5^ο πλάτος, θέτω $v=5$, άρα $t = 5T$

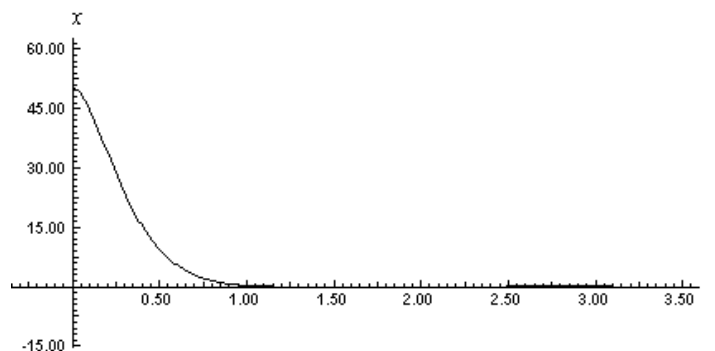
οπότε έχω: $A_5 = A_0 e^{-\Lambda 5T}$



- Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι ο λόγος δύο διαδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων (προς την ίδια κατεύθυνση) είναι σταθερός.

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \text{σταθ} = e^{\Lambda t} \quad (\text{λόγος απόσβεσης})$$

- Το Λ είναι μια σταθερά, που εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης και τη μάζα του ταλαντούμενου σώματος
- Για ορισμένη τιμή της σταθεράς απόσβεσης b η **περίοδος** διατηρείται **σταθερή** και ανεξάρτητη από το πλάτος.
- Όταν η σταθερά **b μεγαλώνει**, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα και η περίοδος παρουσιάζει μια μικρή αύξηση (που εμείς θα θεωρούμε αμελητέα).
- Για πολύ μεγάλες τιμές του b , όπως ταλάντωση μέσα σε παχύρρευστο υγρό (πχ μέλι), η κίνηση γίνεται **απεριοδική**, δηλαδή το σώμα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας, χωρίς ποτέ να την υπερβεί



- Στα αμορτισέρ του αυτοκινήτου θέλουμε μεγάλη απόσβεση. Όταν παλιώνουν η απόσβεση ελαττώνεται, η ταλάντωση διαρκεί περισσότερο, άρα μειώνεται η ασφάλεια της οδήγησης αφού οι ρόδες έχουν λιγότερη πρόσφυση στο δρόμο.
- **Χρόνος ημίσειας ζωής ($t_{1/2}$):** είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε ένα μέγεθος (πχ το πλάτος μιας ταλάντωσης) να ελαττωθεί στο μισό της αρχικής τιμής.

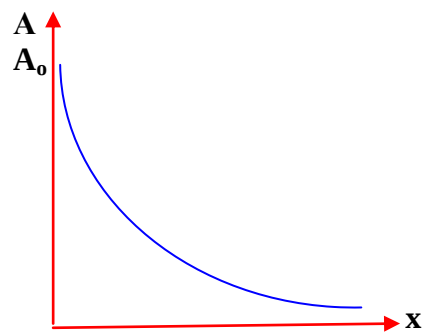
$$t_{1/2} = \ln 2 / \Lambda = 0,693 / \Lambda$$

απόδειξη:

θέτω $A_v = A_0/2$ στην εξίσωση: $A_v = A_0 e^{-\Lambda t}$

$$A_0/2 = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \Rightarrow 1/2 = e^{-\Lambda t} \Rightarrow 2 = e^{\Lambda t} \Rightarrow \ln 2 = \Lambda t \Rightarrow t = \ln 2 / \Lambda$$

- Στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις το ρόλο του b παίζει η ωμική αντίσταση R του κυκλώματος.
- Η γραφική παράσταση του πλάτους συναρτήσει του χρόνου, δηλαδή της εξίσωσης $A_v = A_0 e^{-\Lambda t}$ είναι η περιβάλλουσα (στικτή) καμπύλη που περιβάλλει τα μέγιστα και τα ελάχιστα της ταλάντωσης.

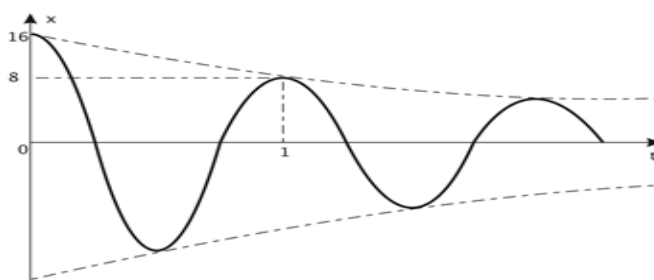


Για να τη σχηματίσετε σωστά παίρνετε για κάποιο (αυθαίρετο) χρόνο το μισό του πλάτους, για το διπλάσιο του το μισό του μισού κλπ, αφού ο χρόνος που απαιτείται για να μειωθεί το πλάτος στο μισό, είναι σταθερός ($t_{1/2}$), ανεξάρτητος δηλαδή του αρχικού πλάτους.

προσοχή:

δεν είναι αυτή η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλαντούμενης σφαίρας, αλλά η

$$x = A_0 e^{-\Lambda t} \eta\mu(\omega' t + \varphi)$$



Λογάριθμοι

- $\ln a = x \Rightarrow a = e^x$
- $\ln e = 1$
- $\ln 1 = 0$
- $e^{\ln x} = x$

$$\begin{aligned}\ln a^x &= x \cdot \ln a \\ \ln(a^b) &= b \ln a \\ \ln(a \cdot b) &= \ln a + \ln b \\ \ln(a/b) &= \ln a - \ln b\end{aligned}$$

$$\ln 2 = 0,693 \approx 0,7 \quad \ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2$$

άσκηση

φθίνουσας ηλεκτρικής ταλάντωσης

κύκλωμα LC με μία ωμική αντίσταση

η θερμότητα που παράγεται στην ωμική αντίσταση υπολογίζεται ως (απώλεια) μεταβολή μεταξύ αρχικής και τελικής ολικής ενέργειας του κυκλώματος:

$$Q_{ολ} = E_{αρχ} - (U_E + U_B)_{τελ}$$

κύκλωμα LC με δύο ωμικές αντιστάσεις σε σειρά

ισχύει πάλι $Q_{ολ} = E_{αρχ} - (U_E + U_B)$

όπου όμως: $Q_{ολ} = Q_1 + Q_2 \quad (1)$

και επειδή σε κάθε στοιχειώδη χρονική διάρκεια Δt η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τις δύο αντιστάσεις είναι η ίδια (κύκλωμα σε σειρά), έχω:

και
$$\begin{aligned}\Delta Q_{1,v} &= I_v^2 \cdot R_1 \cdot \Delta t_v \\ \Delta Q_{2,v} &= I_v^2 \cdot R_2 \cdot \Delta t_v\end{aligned}$$

άρα
$$\Delta Q_{1,v} / \Delta Q_{2,v} = R_1 / R_2$$

δηλαδή
$$\Delta Q_{1,1} / \Delta Q_{2,1} = \Delta Q_{1,2} / \Delta Q_{2,2} = \Delta Q_{1,3} / \Delta Q_{2,3} = \dots = R_1 / R_2$$

και τελικά
$$\Sigma \Delta Q_{1,v} / \Sigma \Delta Q_{2,v} = R_1 / R_2 \quad \text{ή} \quad Q_1 / Q_2 = R_1 / R_2 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει τελικά

$$Q_1 = Q_{ολ} \cdot R_1 / (R_1 + R_2) \quad \text{και} \quad Q_2 = Q_{ολ} \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$$