

Μελέτη της απλής αρμονικής ταλάντωσης

A. Γεωμετρική προσέγγιση

Περιγράφω το φαινόμενο (την κίνηση) με χωρικές μεταβλητές και μόνον, δηλαδή με την **εξίσωση της τροχιάς**: $\psi = 0$ και $x \in [A, -A]$

B. Κινηματική προσέγγιση

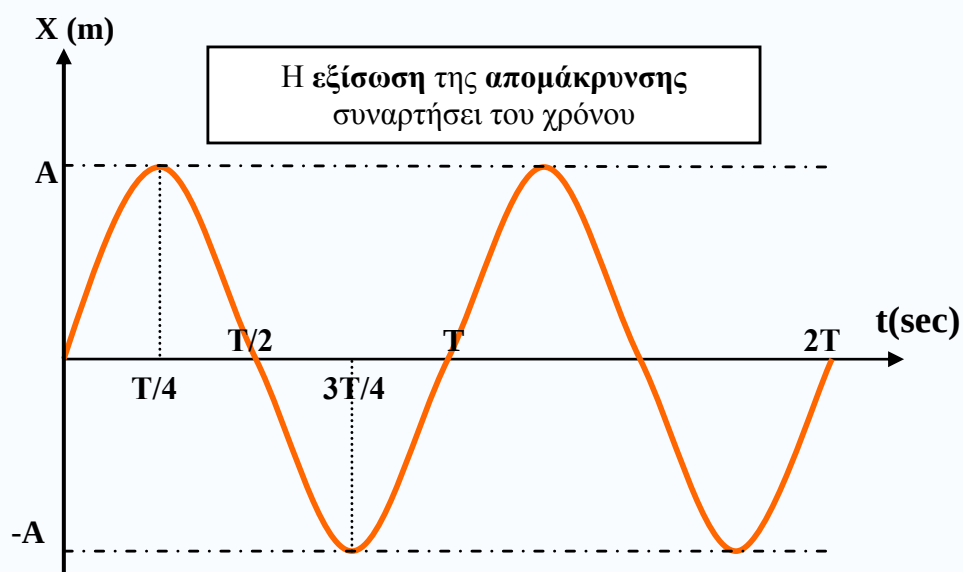
Η εξίσωση της απομάκρυνσης:

(ή εξίσωση της θέσης)

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

Στην περίπτωση που το κινητό βρίσκεται την χρονική στιγμή $t = 0$ στην θέση ισορροπίας, κινούμενο προς την θετική φορά ($U > 0$), τότε η αρχική φάση φ_0 είναι μηδέν και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$x = A\eta\mu\omega t$$



Προσοχή: Αν η ταλάντωση γίνεται σε κατακόρυφο άξονα ($\psi\psi'$) θα έχω:

$$\psi = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

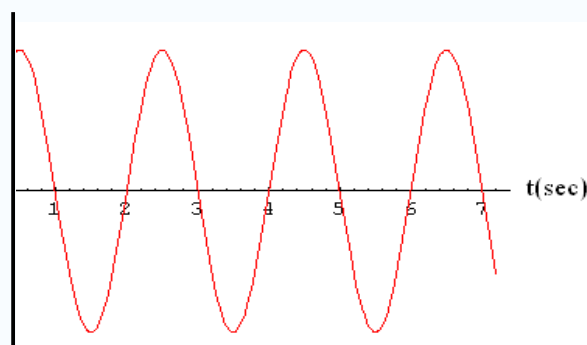
Η εξίσωση της ταχύτητας:

$$U = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

Ο παράγοντας ωA συμβολίζεται με U_{max} και αποτελεί τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας (το πλάτος της ταχύτητας) στην ταλάντωση, που αποκτάται στη θέση ισορροπίας.

άρα $U = U_{max} \sin(\omega t + \phi_0)$ (2)

$U(m/s)$ (για $\phi_0 = 0$)



Η ταχύτητα, με απαλοιφή του χρόνου στο σύστημα των εξισώσεων (1) και (2), μπορεί να εκφραστεί και ως συνάρτηση της θέσης:

$$U = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad (\text{η γραφική της παράσταση είναι έλλειψη})$$

Η εξίσωση της επιτάχυνσης:

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (3)$$

Ο παράγοντας $\omega^2 A$ συμβολίζεται με a_{max} , αποτελεί τη μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης (πλάτος επιτάχυνσης) και αποκτάται στις ακραίες θέσεις ταλάντωσης.

$$a = -a_{max} \sin(\omega t + \phi_0)$$

Η επιτάχυνση χρησιμοποιώντας την εξίσωση απομάκρυνσης μπορεί να εκφραστεί και ως συνάρτηση της θέσης ή της ταχύτητας:

$$a = -\omega^2 x \quad \text{και}$$

$$a = \pm \omega \sqrt{v_{max}^2 - v^2}$$

Γ. Δυναμική προσέγγιση

Η εξίσωση της δύναμης:

$$\Sigma F = -Dx \quad (4)$$

$$\Sigma F = ma \Rightarrow \Sigma F = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \Sigma F = -DA \sin(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \Sigma F = -Dx$$

Στην απλή αρμονική ταλάντωση η σχέση (4) είναι η **ικανή** και **αναγκαία συνθήκη**.

- Αυτό σημαίνει πως η σχέση $\Sigma F = -Dx$ ισχύει σε κάθε απλή αρμονική ταλάντωση, αλλά και ότι αρκεί να δείξω ότι ισχύει η σχέση $\Sigma F = -Dx$ σε τυχαία θέση μιας κίνησης, για να αποδείξω ότι η κίνηση αυτή είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

Προσοχή:

Σαν θετική **φορά της κίνησης**, αν δεν μας δίνεται, θεωρούμε αυθαίρετα εκείνη της αρχικής μετατόπισης. Είναι απαραίτητο για να προκύψει το (-) στη σχέση $\Sigma F = -Dx$

- Στις ασκήσεις λοιπόν που δεν είναι δεδομένο το είδος της κίνησης, αλλά υποψιάζομαι πως είναι Γ.Α.Τ, γράφω δύο εξισώσεις για τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα: μία στη θέση ισορροπίας (όπου $\Sigma F = 0$) και μία σε τυχαία θέση. Από το σύστημα των δύο αποδεικνύω ότι $\Sigma F = -Dx$, άρα συμπεραίνω ότι η κίνηση είναι Γ.Α.Τ.

- Αν γνωρίζω τη **σταθερά επαναφοράς** $D = m\omega^2$ (που για ένα ελατήριο ταυτίζεται με τη σκληρότητα του ελατηρίου k και είναι ανεξάρτητη της μάζας), υπολογίζω την **περίοδο** της ταλάντωσης:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = m \cdot 2\pi/T \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Η **αλλαγή πλάτους** στην ΓΑΤ, ενώ επηρεάζει την $E_{ολ}$, αλλά και τα U_{max} , a_{max} δεν μεταβάλλει την περίοδο.

Έτσι αν πχ διπλασιάσω το πλάτος ($A' = 2A$), θα έχω:

$$E' = 4E, \quad U'_{max} = 2U_{max}, \quad a'_{max} = 2a_{max} \quad \text{αλλά} \quad T' = T$$

Δ. Ενεργειακή προσέγγιση

Η δυναμική ενέργεια

της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2} Dx^2 \quad (\text{συναρτήσεως της θέσης})$$

αλλά μπορεί να εκφραστεί και σαν συνάρτηση του χρόνου:

$$U = \frac{1}{2} Dx^2 = \frac{1}{2} DA^2 \eta^2 \omega t = E_{ολ} \eta^2 \omega t \quad (\text{συναρτήσεως του χρόνου})$$

Προσοχή:

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης **δεν** είναι πάντα ίση με τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου !!! Αν έχω μόνον ένα οριζόντιο ελατήριο συμπίπτουν, όχι όμως σε κατακόρυφο ή σε κεκλιμένο επίπεδο.

Η κινητική ενέργεια

σαν συνάρτηση του χρόνου:

$$K = \frac{1}{2} mU^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sigma \nu^2 \omega t = \frac{1}{2} DA^2 \sigma \nu^2 \omega t = E_{ολ} \sigma \nu^2 \omega t$$

μπορεί να εκφραστεί και σαν **συνάρτηση της θέσης**:

$$K = E - U = \frac{1}{2} DA^2 - \frac{1}{2} Dx^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} D(A^2 - x^2)$$

Προσοχή:

Η **περίοδος** της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας στην ΓΑΤ, είναι η μισή της περιόδου της ταλάντωσης ($T' = T/2$). Στη γραφική παράστασή τους δηλαδή έχω δύο ολόκληρες κυματομορφές σε μια περίοδο της ταλάντωσης.

Αυτό γιατί αν θεωρήσω: $\eta \mu^2 \alpha = (1 - \sin 2\alpha)/2$ και $\sin^2 \alpha = (1 + \sin 2\alpha)/2$
έχω $K = E(1 + \sin 2\omega t)/2$ και $U = E(1 - \sin 2\omega t)/2$

Η διατήρηση της ενέργειας στην ταλάντωση

Σε κάθε θέση της ταλάντωσης (και κάθε χρονική στιγμή)
ισχύει η **ΑΔΕΤ**:

$$E = K + U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} m u^2$$

Προσοχή:

Η ενέργεια της ταλάντωσης (δυναμική, κινητική ή ολική) είναι **πάντα θετική**.

Στη Θ.Ι. όπου $U=0$, έχω $E = K_{\max} = \frac{1}{2} D A^2$

Στα άκρα όπου $K=0$, έχω $E = U_{\max} = \frac{1}{2} D A^2$

Αν παραγωγίσουμε τη σχέση: $E = K + U = \text{σταθ}$

θα έχουμε: $E' = K' + U'$

αλλά $E' = 0$ άρα $K' + U' = 0$ ή $K' = -U'$

δηλαδή $dU/dt = -dK/dt$ (για κάθε t)

«Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας, είναι πάντα (κάθε στιγμή) αντίθετος με τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας».

(όταν αυξάνεται η μια, ελαττώνεται άλλο τόσο η άλλη).