

Επίλυση

Τυπικής άσκησης Μηχανικών ταλαντώσεων

1. Έστω x_0 η αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου (στη θέση ισορροπίας)

$$\text{Ισχύει: } \Sigma F = 0 \Rightarrow B = F_{ελ}$$

$$\text{ή} \quad mg = kx_0 \quad (1)$$

Σε τυχαία θέση, με μετατόπιση x από τη θέση ισορροπίας (προς τα κάτω), η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $(x+x_0)$

$$\text{έχω: } \Sigma F = B - F_{ελ} \Rightarrow mg - k(x+x_0) \quad (2).$$

όπου θεωρώ σαν θετική τη φορά της μετατόπισης, δηλαδή προς τα κάτω.

λόγω της (1) η (2) γράφεται:

$$\Sigma F = kx_0 - k(x+x_0) \text{ ή τελικά } \Sigma F = -kx, \text{ άρα η κίνηση είναι ΓΑΤ (με } \mathbf{D} = \mathbf{x}).$$

2. $f = N/t = 300/60s \Rightarrow f = 5\text{Hz}$ (1 min = 60 sec)

$$T = 1/f = 1/5 \Rightarrow T = 0,2 \text{ sec}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5 \Rightarrow \omega = 10\pi \text{ rad/sec}$$

3. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 m/k \Rightarrow$

$$m = kT^2/4\pi^2 = 10.0,04/4 \cdot 10 \Rightarrow m = 10^{-2} \text{ kg}$$

4. $A = d \Rightarrow A = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$$E = \frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 \Rightarrow E_{ελ} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

5. Στη θέση ισορροπίας είναι: $\Sigma F = 0$ ή $mg = kx_0$

$$\text{άρα } x_0 = mg/k \Rightarrow x_0 = 10^{-2} \text{ m}$$

Έχω για $t=0$, $x=A$

άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης $x = x_0 \eta \mu(\omega t + \phi_0)$

γράφεται: $A = A \eta \mu \phi_0 \Rightarrow 1 = \eta \mu \phi_0$, άρα $\phi_0 = \pi/2$

6. $u_0 = \omega A = 10\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow u_0 = 0,2\pi \text{ m/s}$

7. $(du/dt)_{\max} = a_{\max} = \omega^2 A = (10\pi)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow a_{\max} = 20 \text{ m/s}^2$

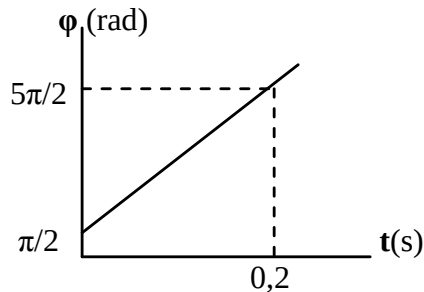
και αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t = T/2$, όταν δηλαδή η σφαίρα βρίσκεται στο άλλο άκρο της ταλάντωσης, όπου η δύναμη άρα και η επιτάχυνση είναι μέγιστη.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -\mathbf{a}_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow a_0 = -a_0 \eta\mu(\omega t + \pi/2) \Rightarrow 1 = -\eta\mu(\omega t + \pi/2) \Rightarrow \\ -1 &= \eta\mu(\omega t + \pi/2) \Rightarrow \eta\mu 3\pi/2 = \eta\mu(\omega t + \pi/2) \Rightarrow 2\kappa\pi + 3\pi/2 = \omega t + \pi/2 \Rightarrow \\ \omega t &= 2\kappa\pi + \pi \text{ και για } \kappa=0, 2\pi/T = \pi \text{ ή } t = T/2 \end{aligned}$$

8. Μία διατύπωση του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα, πέραν της $\Sigma F = ma$ είναι και η $\Sigma \mathbf{F} = (d\mathbf{P}/dt)$ άρα $(dP/dt)_{\max} = F_{\max} = ma_{\max} = m\omega^2 A$

$$= 10^{-2} \cdot (10\pi)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow F_{\max} = 0,2 \text{ N}$$

9. $\varphi = \omega t + \varphi_0 \Rightarrow \varphi = 10\pi t + \pi/2$



10. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 2 \cdot 10^{-2} \eta\mu(10\pi t + \pi/2)$

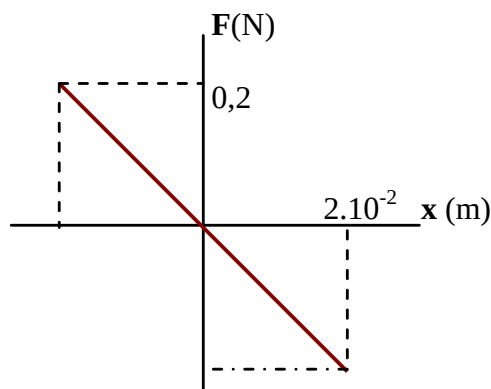
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow u = 0,2\pi \sigma\upsilon\nu(10\pi t + \pi/2)$$

$$\mathbf{a} = -\mathbf{a}_0 \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow a = -20 \eta\mu(10\pi t + \pi/2)$$

11. $\mathbf{U} = \pm \omega \sqrt{\mathbf{A}^2 - \mathbf{x}^2} \Rightarrow U = \pm 10\pi (16 \cdot 10^{-4} - x^2)^{1/2}$

$$a = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{x} = -1000x$$

$$F = -Dx = -10x$$



$$12. \quad U = E \eta \mu^2 (\omega t + \pi/2) = 2 \cdot 10^{-3} \eta \mu^2 (10\pi t + \pi/2)$$

$$K = E \sigma v^2 (\omega t + \pi/2) = 2 \cdot 10^{-3} \sigma v^2 (10\pi t + \pi/2)$$

$$E = 2 \cdot 10^{-2} J = \sigma \tau \alpha \theta.$$

$$13. \quad U = \frac{1}{2} k x^2$$

$$K = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$$

$$E = \sigma \tau \alpha \theta.$$

$$14. \quad u = u_0 \sigma v (\omega t + \phi_0) = u_0 \sigma v (10\pi/60 + \pi/2) = u_0 \sigma v (\pi/6 + \pi/2) = u_0 \eta \mu \pi/6 = u_0 \frac{1}{2}$$

$$15. \quad U = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$u = 10\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 0,2\pi \text{ m/s}$$

$$\alpha = -\omega^2 x =$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 =$$

$$16. \quad E = K + U = 2U \quad (\alpha \phi \acute{o} \upsilon \ K = U)$$

$$\frac{1}{2} k A^2 = 2 \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow A^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm A \sqrt{2} / 2$$

17.

18.

$$19. \quad x = 2 \cdot 10^{-2} \eta \mu (10\pi t + \pi/2)$$

$$x_0 = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\eta \mu (10\pi t + \pi/2) = \frac{1}{2} = \eta \mu \pi/6$$

20.

21.

$$22. \quad U/K = \frac{1}{2} k x^2 / \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) = x^2 / A^2 - x^2$$

$$\alpha \lambda \lambda \acute{\alpha} \quad x = A/4 \quad \acute{\alpha} \rho \alpha \quad U/K = 1/15$$

23.

24. έστω u_1 η ταχύτητα της σφαίρας κάποια χρονική στιγμή t_1 και u_2 ταχύτητά της μετά από $T/2$.

θα είναι: $u_1 = \omega A \sin \omega t$ και $u_2 = \omega A \sin(\omega t + \pi)$

γιατί $\Delta t = T/2$ αντιστοιχεί σε $\Delta \phi = \pi$

αλλά $\sin(\omega t + \pi) = -\sin \omega t$, άρα $\Delta u = u_2 - u_1 = -2 u_1$

25.

26.

27.

28. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης συναρτήσει του χρόνου, δίνεται από τη σχέση: $U = E \eta \mu^2 \omega t$ (1)

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της, είναι η πρώτη παράγωγος της (1):

$$\begin{aligned} U' &= dU/dt = E(\eta \mu^2 \omega t)' = E(2\eta \mu \omega t)(\eta \mu \omega t)' = 2E\eta \mu \omega t \sin \omega t (\omega t)' = \\ &= \omega E \eta \mu 2 \omega t \quad (2) \end{aligned}$$

Και παίρνει μέγιστο για την τιμή που μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγός της.

Η δεύτερη παράγωγος της (1) είναι:

$$U'' = (\omega E \eta \mu 2 \omega t)' = \omega E (\eta \mu 2 \omega t)' = \omega E (\sin 2 \omega t)(2 \omega t)' = 2 \omega^2 E \sin 2 \omega t$$

και μηδενίζεται όταν $\sin 2 \omega t = 0$

αλλά αν $\sin 2 \omega t = 0$ τότε $\eta \mu 2 \omega t = 1$

έτσι, θέτοντας $\eta \mu 2 \omega t = 1$ στην (2) έχω: $(dU/dt)_{\max} = \omega E$

29. Η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης συναρτήσει του χρόνου, δίνεται από τη σχέση: $K = E \sigma \nu^2 \omega t$ (1)

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της, είναι η πρώτη παράγωγος της (1):

$$\begin{aligned} K' &= dK/dt = E(\sigma \nu^2 \omega t)' = E(2\sigma \nu \omega t)(\sigma \nu \omega t)' = 2E\sigma \nu \omega t (-\eta \mu \omega t) (\omega t)' = \\ &= -\omega E \eta \mu 2 \omega t \quad (2) \end{aligned}$$

Και παίρνει μέγιστο για την τιμή που μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγός της.

Η δεύτερη παράγωγος της (1) είναι:

$$K'' = (-\omega E \eta \mu 2 \omega t)' = -\omega E (\eta \mu 2 \omega t)' = -\omega E (\sin 2 \omega t)(2 \omega t)' = -2 \omega^2 E \sin 2 \omega t$$

και μηδενίζεται όταν $\sin 2 \omega t = 0$

αλλά αν $\sin 2\omega t = 0$ τότε $\eta\mu 2\omega t = 1$

έτσι, θέτοντας $\eta\mu 2\omega t = 1$ στην (2) έχω: $(dK/dt)_{\max} = -\omega E$