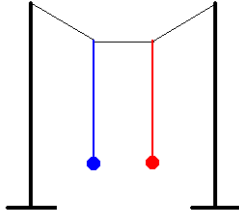


Σύνθεση ταλαντώσεων

A. Σύνθεση δύο α.α.τ της ίδιας συχνότητας

Έστω ένα σώμα που εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας συχνότητας που περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις:


$$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t) \qquad x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Η απομάκρυνση του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή θα είναι

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = A_1 \eta\mu(\omega t) + A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Η παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιώντας τις γνώσεις από τα μαθηματικά

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$x = A_1 \eta\mu(\omega t) + A_2 \eta\mu(\omega t) \sigma\upsilon\nu\varphi + A_2 \eta\mu\varphi \sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

$$x = (A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi) \cdot \eta\mu(\omega t) + A_2 \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

Η άλγεβρα Β λυκείου μας λέει ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha \eta\mu x + \beta \sigma\upsilon\nu x$$

μπορεί να γραφεί με την μορφή

$$f(x) = \rho \eta\mu(x + \varphi)$$

όπου

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

και φ μια γωνία που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\rho}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho}$$

οπότε στην δική μας περίπτωση η εξίσωση

$$x = (A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\varphi) \cdot \eta\mu(\omega t) + A_2 \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

μπορεί να γραφεί με την μορφή

$$x = A\eta\mu(\omega t + \theta) \quad \text{όπου}$$

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi)^2 + (A_2\eta\mu\varphi)^2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi + A_2^2\eta\mu^2\varphi}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

και θ μια γωνία για την οποία

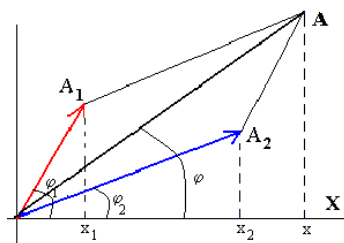
$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}{A}, \quad \eta\mu\theta = \frac{A_2\eta\mu\varphi}{A}$$

Το τελικό **συμπέρασμα** είναι ότι η σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας οδηγεί επίσης σε **απλή αρμονική ταλάντωση** της ίδιας συχνότητας.

Παρατήρηση : Αν και οι δύο εξισώσεις παρουσιάζουν αρχική φάση μπορούμε να τις ανάγουμε στην παραπάνω περίπτωση με αλλαγή μεταβλητής ως εξής:

$$x_1 = A_1\eta\mu(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\eta\mu(\omega t + \varphi_2)$$



θέτοντας $\omega t + \varphi_1 = \omega t' \Leftrightarrow \omega t = \omega t' - \varphi_1$ οπότε οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται

$$x_1 = A_1\eta\mu(\omega t') \quad \text{και} \quad x_2 = A_2\eta\mu(\omega t' + \varphi_2 - \varphi_1) \Leftrightarrow x_2 = A_2\eta\mu(\omega t' + \varphi')$$

που είναι της ίδιας μορφής με τις αρχικές εξισώσεις

Παρατήρηση : Συνηθίζουμε να υπολογίζουμε την $\epsilon\varphi\theta$. Όμως όποτε απλοποιούμε υπερβολικά τα μαθηματικά συχνά το πληρώνουμε με ασάφειες δηλαδή υπολογίζοντας την

$$\epsilon\varphi\theta = \frac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

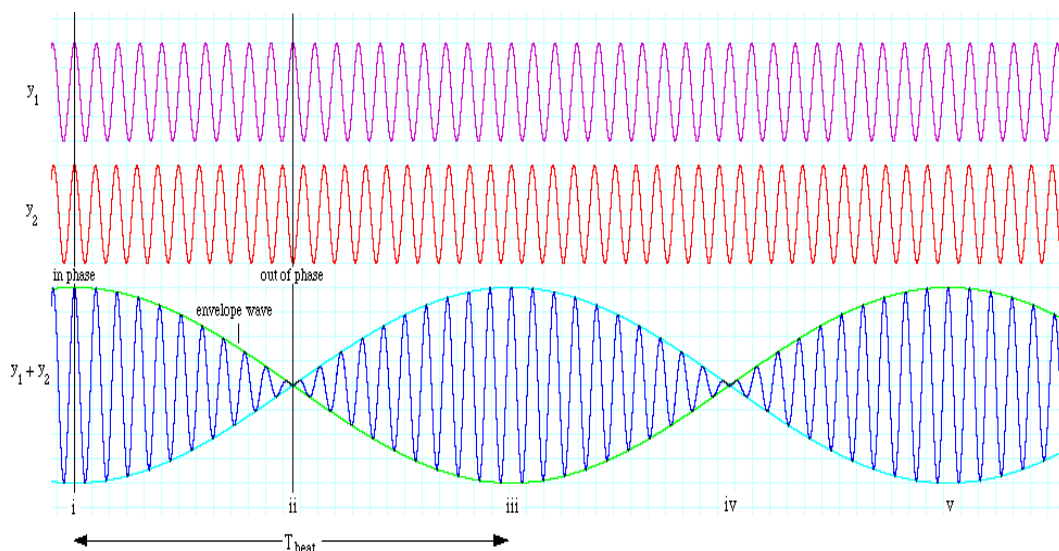
δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την γωνία θ γιατί και η γωνία $\pi + \theta$ έχει την ίδια εφαπτομένη ($\epsilon\varphi(\pi + \theta) = \epsilon\varphi\theta$) ενώ αν γνωρίζουμε το $\eta\mu\varphi$ και το $\sigma\upsilon\nu\varphi$ μπορούμε να προσδιορίσουμε το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η γωνία.

Διακρότημα

Έστω ότι έχουμε τη σύνθεση δύο ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, ίδιου πλάτους, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με **λίγο διαφορετικές συχνότητες** ($\omega_1 \approx \omega_2$).

$$x_1 = A \eta \mu \omega_1 t \quad \text{και} \quad x_2 = A \eta \mu \omega_2 t$$

όπου $\omega_1 - \omega_2$ πολύ μικρό



Η κίνηση που προκύπτει από τη σύνθεση των δύο ταλαντώσεων είναι πολύπλοκη. Είναι μια ιδιόμορφη περιοδική κίνηση με αυξομειούμενο πλάτος (από 0 έως $2A$), που λέμε ότι παρουσιάζει διακροτήματα, έχει την ίδια περίπου συχνότητα με τις επιμέρους ταλαντώσεις ($\bar{\omega} \approx \omega_1 \approx \omega_2$) και η εξίσωση της απομάκρυνσής της είναι η παρακάτω:

$$\text{τριγωνομετρική ταυτότητα: } \eta \mu A + \eta \mu B = 2 \eta \mu (A+B)/2 \sin (A-B)/2$$

$$x_{\text{ολ}} = x_1 + x_2 = A(\eta \mu \omega_1 t + \eta \mu \omega_2 t)$$

$$x = 2A \sin \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \eta \mu \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$$

ή

$$x = A' \eta \mu \bar{\omega} t$$

όπου

$$A' = 2A \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$$

Ο παράγοντας $\sin(\omega_1 - \omega_2)/2 t$ μεταβάλλεται πολύ πιο αργά από τον παράγοντα $\eta \mu(\omega_1 + \omega_2)/2 t$, που έχει γωνιακή συχνότητα τη μέση τιμή των ω_1 και ω_2 .

Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς (ή μεγιστοποιήσεις) του πλάτους είναι σταθερός, ονομάζεται περίοδος του διακροτήματος (T_δ) και ισούται με:

$$T_\delta = 1/|f_1 - f_2| = T_1 T_2 / T_2 - T_1$$

Η διαφορά συχνότητας των δυο ταλαντώσεων δημιουργεί μεταβαλλόμενη διαφορά φάσης, από $\Delta\phi=0$ (οπότε και έχουμε μέγιστο, $A' = 2A$), μέχρι $\Delta\phi=180^\circ$ οπότε έχουμε ελάχιστο (δηλαδή πλάτος μηδέν).

Η γραφική παράσταση παριστά περίπτωση ταλάντωσης με διαμορφωμένο πλάτος, γνωστή ως διακρότημα.

Προσοχή:

Η κυκλική συχνότητα της σύνθετης ταλάντωσης είναι

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{και αν θέσω } \omega = 2\pi/T \quad \text{προκύπτει ότι}$$

$$2\bar{\omega} = \omega_1 + \omega_2 \Rightarrow 2 \cdot 2\pi/T = 2\pi/T_1 + 2\pi/T_2 \Rightarrow$$

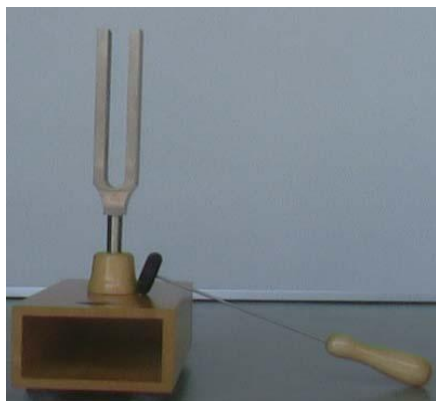
$$2/T = 1/T_1 + 1/T_2 \Rightarrow T = 2T_1T_2 / T_1 + T_2$$

Αυτή είναι η περίοδος της σύνθετης ταλάντωσης, που είναι άλλη από την περίοδο του διακροτήματος.

Ερώτηση:

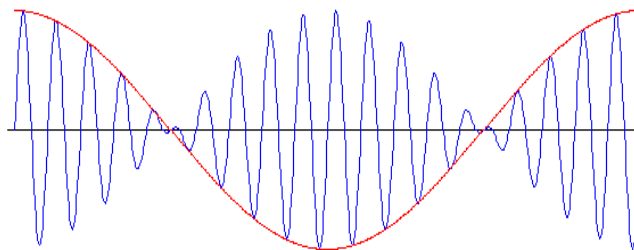
Πόσες πλήρεις ταλαντώσεις έχουμε μέσα σε μια περίοδο του διακροτήματος;

$$T_\delta = N \cdot T \Rightarrow N = T_\delta / T \Rightarrow N = T_1 + T_2 / 2(T_1 - T_2)$$



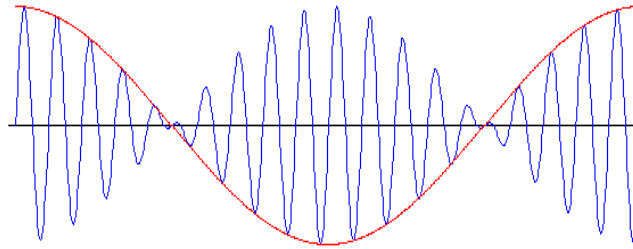
Τα δύο σκέλη του διαπασών πάλλονται με την ίδια συχνότητα όταν κτυπήσουμε το ένα από τα δύο και ο ήχος που παράγεται ενισχύεται από το αντιηγείο.

Αν κολλήσουμε ένα μικρό κομμάτι πλαστελίνη στην άκρη του ενός, μεταβάλλεται λίγο η μάζα του (άρα και η ιδιοσυχνότητά του), οπότε παράγεται διακρότημα. Ο ήχος που ακούμε δηλαδή έχει ένταση που αυξομειώνεται περιοδικά με τον χρόνο.



Άσκηση διακροτήματος

Σώμα μάζας $m = 0,2 \text{ Kg}$ εκτελεί ταυτόχρονα δύο συμφασικές απλές αρμονικές ταλαντώσεις, με την ίδια διεύθυνση και θέση ισορροπίας, που έχουν πλάτος $A = 2 \text{ cm}$ και συχνότητες $f_1 = 100,1 \text{ Hz}$ και $f_2 = 99,9 \text{ Hz}$ αντίστοιχα.



1. Να γράψετε τις εξισώσεις των συνιστωσών ταλαντώσεων.
2. Ποιό το μέγιστο πλάτος και η μέγιστη δυναμική ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης του σώματος;
3. Ποιά η κυκλική συχνότητα και η περίοδος της σύνθετης ταλάντωσης;
4. Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης.
5. Να υπολογίσετε τον χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων (ή μηδενισμών) του πλάτους (την περίοδο του διακροτήματος).
6. Να υπολογίσετε τον χρόνο μεταξύ μεγιστοποίησης του πλάτους και του αμέσως πρώτου μηδενισμού του.
7. Πόσες πλήρεις ταλαντώσεις εκτελεί το σώμα σε χρονική διάρκεια $\Delta t = 2 \text{ sec}$;
8. Πόσες παύσεις έχουμε σε χρονικό διάστημα $t = 15 \text{ sec}$
9. Να υπολογίσετε τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα και τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ sec}$.
10. Να γράψετε τις εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της σύνθετης ταλάντωσης.
11. Ποιά η διαφορά φάσης των δύο συνιστωσών τη χρονική στιγμή $t_1 = 2,5 \text{ sec}$
12. Πόσο πρέπει ελαττώσουμε να τη μεγαλύτερη συχνότητα για να διπλασιαστεί η περίοδος του διακροτήματος;
13. Ποιά θα είναι τώρα η εξίσωση της νέας σύνθετης ταλάντωσης;

Επίλυση άσκησης διακροτήματος

Σώμα μάζας $m = 0,2 \text{ Kg}$ εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με την ίδια διεύθυνση και θέση ισορροπίας, που έχουν πλάτος $A = 2 \text{ cm}$ και συχνότητες $f_1 = 100,1 \text{ Hz}$ και $f_2 = 99,9 \text{ Hz}$ αντίστοιχα.

1. Να γράψετε τις εξισώσεις των συνιστωσών ταλαντώσεων και την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης.

είναι: $\omega_1 = 2\pi \cdot 100,1$ και $\omega_2 = 2\pi \cdot 99,9$

άρα

$$\omega_1 - \omega_2 / 2 = 0,2\pi \quad \text{και} \quad \omega_1 + \omega_2 / 2 = 200\pi$$

έτσι έχω :

$$x_1 = 0,02\eta\mu 200,2\pi t \quad \text{και} \quad x_2 = 0,02\eta\mu 199,8\pi t$$

και για τη σύνθετη ταλάντωση: $x = 0,04 \cdot \sin 0,2\pi t \cdot \eta\mu 200\pi t$

2. Ποιό το μέγιστο πλάτος και η μέγιστη δυναμική ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης του σώματος;
3. Ποιά η κυκλική συχνότητα και η περίοδος της σύνθετης ταλάντωσης;
4. Να υπολογίσετε τον χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων (ή μηδενισμών) του πλάτους (την περίοδο του διακροτήματος).
5. Πόσες πλήρεις ταλαντώσεις εκτελεί το σώμα σε χρονική διάρκεια $\Delta t = 2 \text{ sec}$;
6. Πόσες παύσεις έχουμε σε χρονικό διάστημα $t = \text{sec}$
7. Να υπολογίσετε τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα και τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ sec}$.
8. Να γράψετε τις εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της σύνθετης ταλάντωσης.
9. Ποιά η διαφορά φάσης των δύο συνιστωσών τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ sec}$
10. Πόσο πρέπει να ελαττώσουμε τη μεγαλύτερη συχνότητα για να διπλασιαστεί η περίοδος του διακροτήματος;
11. Ποιά θα είναι τώρα η εξίσωση της νέας σύνθετης ταλάντωσης;