

Το παιχνίδι των διαστάσεων

(ανοιγοκλείνοντας τις διαστάσεις)

Ένα κυκλικό στεφάνι μπορεί να μου φανεί σαν έλλειψη ή ακόμη σαν ευθύγραμμο τμήμα ή και ένα απλό σημείο, ανάλογα με τη γωνία που το κοιτάζω και την απόστασή του από εμένα (κάθε φορά χάνονται–κρύβονται μια ή δύο διαστάσεις).

Έτσι η τροχιά ενός αστεριού στον ουρανό μπορεί να μου φανεί ομαλή κυκλική, ή έλλειψη, ή γραμμική αρμονική ταλάντωση, ανάλογα με τη γωνία με την οποία βλέπω το επίπεδο της τροχιάς του. Ένας αστρονόμος δηλαδή που παρατηρεί τη φαινόμενη τροχιά ενός μακρινού αστεριού να

Ένα μερμήγκι που περπατάει πάνω σε ένα περιορισμένου μήκους κυκλικό στεφάνι μπορεί να έχει την αίσθηση ότι κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα, απείρου μήκους.

Ένας μακρινός γαλαξίας στο σύμπαν μπορεί να μας φαίνεται σαν ένα ασήμαντο αδιάστατο Ευκλείδειο σημείο. Όσο τον πλησιάζουμε όμως και μας ‘ανοίγονται’ μία-μία οι διαστάσεις του, μας αποκαλύπτεται τελικά ένας ολόκληρος κόσμος.

Στη σύγχρονη φυσική, ο αριθμός των διαστάσεων ‘παίζει’. Έτσι για τη διατύπωση της θεωρίας των υπερχορδών πχ χρησιμοποιούμε έναν αφηρημένο χώρο 11 διαστάσεων (δεν είναι παρά ένα μαθηματικό κατασκεύασμα), από τις οποίες, πέραν των 4 γνωστών: μήκος, πλάτος, ύψος, χρόνος, οι υπόλοιπες 7 θεωρούμε πως είναι πολύ μικρές, άρα δεν είναι παραστάσιμες.

Σχέση **GAT** και ημιτονοειδούς μεταβολής:

Παίρνω ένα χωνί με μικρό στόμιο και το γεμίζω με άμμο. Κρεμάω το χωνί από το ελεύθερο άκρο νήματος, που είναι αναρτημένο από σταθερό σημείο στην οροφή και εκτρέποντάς το από τη θέση ισορροπίας, το θέτω σε οριζόντια ταλάντωση. Το ίχνος που θα αφήσει η άμμος σε ένα χαρτόνι, που βρίσκεται κάτω από το χωνί, θα είναι ένα ευθύγραμμο (μονοδιάστατο) τμήμα.

Αν όμως ‘ανοίξω’ μια ακόμη διάσταση, μετακινώντας το χαρτί με μικρή σταθερή ταχύτητα, κάθετα στη κίνηση του χωνιού, το ίχνος που θα προκύψει, θα είναι μια ωραιότατη ημιτονοειδής καμπύλη !

Το ίδιο θα προκύψει αν φωτογραφίσω την ταλάντωση σφαίρας που εξαρτάται από κατακόρυφο ελατήριο, μετακινώντας με σταθερή ταχύτητα τη φωτογραφική μου μηχανή οριζόντια, έχοντας αφήσει το διάφραγμα ανοικτό (βλέπε φωτογραφία βιβλίου σελ. 10).

Αν πάλι θέσω το χωνί σε οριζόντια κυκλική (δισδιάστατη) κίνηση και ενεργοποιήσω τώρα μια τρίτη διάσταση, μετακινώντας το χαρτόνι με μικρή σταθερή ταχύτητα προς τα κάτω, θα έχω μια απίθανη τρισδιάστατη έλικα !!!

Σχέση **GAT** και ομαλής **κυκλικής** κίνησης:

Αν παρατηρήσω απλά ένα σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση από τα πλάγια (κρύβοντας τη μια από τις δύο διαστάσεις), αυτό που θα δω είναι μια τέλεια γραμμική αρμονική ταλάντωση.

Άρα μπορώ να θεωρήσω ότι: η απλή αρμονική ταλάντωση δεν είναι παρά η **προβολή** της ομαλής κυκλικής κίνησης πάνω σε μία της διάμετρο.

Με το τέχνασμα αυτό μπορούν να προκύψουν οι εξισώσεις της απλής αρμονικής ταλάντωσης, με τις στοιχειώδεις γνώσεις Τριγωνομετρίας, επιπέδου Α' Λυκείου.

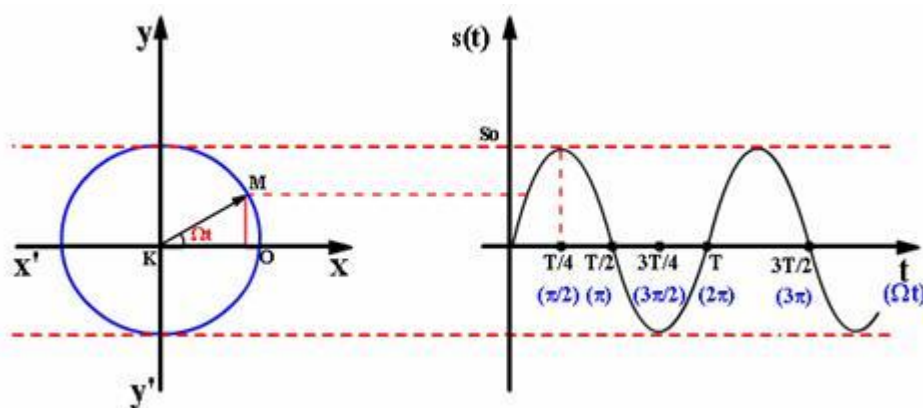
Κύκλος αναφοράς και στρεφόμενο διάνυσμα φάσης

(διανυσματική μέθοδος του Fresnel)

Θεωρώ υλικό σημείο που εκτελεί δεξιόστροφη ομαλή κυκλική κίνηση, ακτίνας R . Έστω τη χρονική στιγμή $t=0$ το σημείο στο σημείο K του παρακάτω σχήματος και Λ η θέση του την τυχαία χρονική στιγμή t_1 . Αν T η περίοδος της κίνησης, τότε σε $T/4$ το υλικό σημείο θα βρίσκεται στη θέση A , τη στιγμή $T/2$ στην θέση K' και τη στιγμή $3T/4$ στη θέση A' , ενώ σε χρόνο T έχει επανέλθει στην αρχική του θέση K .

Το στρεφόμενο άνυσμα -μέθοδος του **Fresnel**-

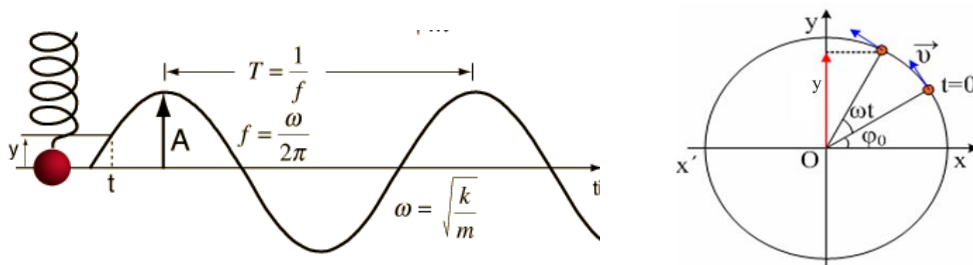
Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε μία έξυπνη ιδέα αντιστοίχισης του μοντέλου παράστασης μιας ΓΑΤ με ημιτονοειδή μεταβολή (δεξιά), με το μοντέλο της προβολής μιας ομαλής κυκλικής κίνησης σε μια διάμετρο της (αριστερά), που αποτελεί το **στρεφόμενο άνυσμα**.



Αν θεωρήσω δηλαδή ένα διάνυσμα, που το μέτρο του είναι ίσο με το πλάτος A μιας ΓΑΤ, να περιστρέφεται αριστερόστροφα (αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού), γύρω από την αρχή του K , με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω ίση με την κυκλική συχνότητα της ΓΑΤ, τότε η προβολή του στον άξονα $\psi\psi'$, θα μας δίνει κάθε στιγμή την απομάκρυνση (του σώματος που εκτελεί ΓΑΤ σε άξονα $\psi\psi'$) από τη θέση ισορροπίας του.

Η προβολή τώρα του υλικού σημείου θα ξεκινάει από τη θέση O , κινούμενη προς τα δεξιά, για να βρεθεί σε $T/4$ στην θέση A . Στη συνέχεια επιστρέφει στο O τη στιγμή $T/2$, κινούμενη προς τα αριστερά, για να περάσει από τις θέσεις A' και O αντίστοιχα τις χρονικές στιγμές $3T/4$ και T .

Παρατηρήστε στο παρακάτω σχήμα την αντιστοιχία ταλάντωσης, ημιτονοειδούς μεταβολής της απομάκρυνσης και στρεφόμενου διανύσματος, για μια κατακόρυφη ΓΑΤ με αρχική φάση ϕ_0



1. Η εξίσωση της απομάκρυνσης:

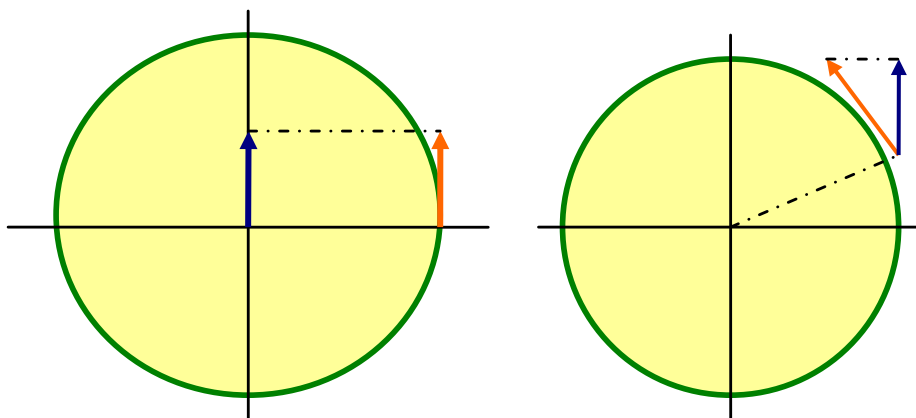
Η απομάκρυνση (ψ) από τη θέση ισορροπίας O , την τυχαία χρονική στιγμή t_1 είναι προφανώς ίση με την προβολή της επιβατικής ακτίνας OA στον άξονα $\psi\psi'$. Αλλά έχω $\eta\mu\phi = \psi/R$, άρα $\psi = R\eta\mu\phi$.

Αν θεωρήσω $R = A$ και $\phi = \omega t$, τότε έχω της εξίσωση της απομάκρυνσης για μια απλή αρμονική ταλάντωση, χωρίς αρχική φάση: **$\psi = A\eta\mu\omega t$**

1. Η εξίσωση της ταχύτητας:

Αν παραστήσω την σταθερή ταχύτητα περιστροφής u σε μια ομαλή κυκλική κίνηση με το πορτοκαλί διάνυσμα (εφαπτόμενο σε κάθε θέση στην τροχιά) και την προβολή του στον άξονα $\psi\psi'$ (που θα αντιστοιχεί στη στιγμιαία ταχύτητα της ταλάντωσης) με το μπλε διάνυσμα, τότε αφού η u είναι η μέγιστη ταχύτητα ($u_{\max}$) της ταλάντωσης, έχω:

$$u = u_{\max} \sigma\upsilon\nu\omega t$$



- Το μέτρο της ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση είναι **$U = \omega R$** (άρα **$U = \omega A$** αν θεωρήσω $R = A$).
- Τη χρονική στιγμή $t=0$ η προβολή της ταχύτητας στον άξονα $\psi\psi'$ είναι ίση με την ταχύτητα, άρα $U_{\max} = \omega A$ (σχήμα αριστερά).
- Την τυχαία χρονική στιγμή t , όπου η φάση είναι $\phi = \omega t$, η προβολή της ταχύτητας θα είναι **$U = U_{\max} \sigma\upsilon\nu\omega t$** (σχήμα δεξιά)